Zur Theorie der konformen Abbildung

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde der
Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Basel vorgelegt

von

Joseph Kaufmann
aus Basel

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

BASEL
Basler Druck- und Verlagsanstalt
1917

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. E. Hecke und Dr. O. Spiess.

Basel, den 24. Oktober 1916.

Fr. Fichter,
Dekan.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 5

Kapitel I. **Über die konformen Abbildungen von veränderlichen Gebieten:**

§ 1 Satz I und sein Beweis 11
§ 2 Umkehrung des Satzes I 14
§§ 3—7 Verallgemeinerungen 15

Kapitel II. **Kontinuitätsbeweise im Gebiete der konformen Abbildung.**

A) Konforme Abbildung endlichblättriger einfachzusammenhängender Polygone auf einen schlichten Kreis:

§ 1 Polygone, die den unendlichfernen Punkt weder im Innern noch auf dem Rande haben 24
§ 2 Beweis 25
§ 3 Polygone, die den Punkt Unendlich im Innern als regulären Punkt aber nicht auf dem Rande haben und zerklüftete Polygone 28
§ 4 Beweis für zerklüftete Polygone 30
§ 5 Beweis für nichtzerklüftete Polygone 33
§ 6 Polygone, deren Seiten endlichvielmal durch Unendlich ziehen 36
§ 7 Polygone, die im innern Punkte Unendlich Verzweigungsstellen endlicher Ordnung haben 37
§ 8 Polygone mit unendlichfernen Ecken 37

B) Der allgemeine Abbildungssatz für einfachzusammenhängende Bereiche und das allgemeine Uniformisierungsprinzip:

§1 Beweis des Abbildungssatzes für einfachzusammenhängende Bereiche . . 38
§ 2 Beweis des allgemeinen Uniformisierungsprinzipes 40

C) Das Kreisnormierungstheorem für endlichen Zusammenhang:

§ 1 Das Theorem 41
§ 2 Gedankengang des 1. Beweises 42
§ 3 Durchführung des 1. Beweises 43
§ 4 2 Anmerkungen 48
§ 5 Charakterisierung des 2. Beweises 49
§ 6 Durchführung dieses Beweises für verzweigungspunktfreie Bereiche . . . 50

Zusammenfassung der Hauptergebnisse 58

Vita 59

Einleitung.

Diese Arbeit fusst auf einem Satze von Herrn Bieberbach,[1]) der so lautet: Sei $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ eine Folge gleichmässig beschränkter schlichter Gebiete, die gegen ihren Kern B konvergieren, und die den Nullpunkt im Innern enthalten. In jedem der Gebiete B_n sei eine Funktion $f_n(z)$ definiert, die dasselbe auf ein schlichtes Gebiet A_n eineindeutig konform abbildet; die A_n seien gleichmässig beschränkt und es sei $f_n(0) = 0$ und $|f_n'(0)| \neq 1$ oder $f_n'(0) = 1$.

Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $f_n(z)$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ konvergieren, die, dass die A_n gegen ihren Kern A konvergieren. Die Grenzfunktion $f(z)$ bildet den Kern B auf den Kern A eineindeutig konform ab.

Dabei versteht man nach Caratheodory[2]) unter dem Kern einer Gebietsfolge das grösste Gebiet, das den Nullpunkt im Innern enthält, und dessen einzelne Punkte innere Punkte fast aller Gebiete der Folge sind. Gibt es kein solches Gebiet, den Nullpunkt allein. Weiter sagt Herr Caratheodory,[2]) eine Gebietsfolge konvergiere gegen ihren Kern, wenn jede Teilfolge den gleichen Kern besitzt.

Der Gedanke, die notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmässige Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ durch eine präzis zu definierende Konvergenz der Gebietsfolge A_n gegen ihr Grenzgebiet A zu geben, rührt von Herrn Caratheodory[2]) her, der diese neue Schlussweise für die Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ des Einheitskreises eingeführt hat.

---

[1]) L. Bieberbach: Über einen Satz des Herrn Caratheodory. Göttinger Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1. November 1913. S. 552—559.

[2]) C. Caratheodory: Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Mathematische Annalen. Bd. 72. S. 107 ff.

Die Caratheodoryschen Beweise benützen ausser dem Montelschen Satze[3]) über die Kompaktheit der eindeutigen, gleichmässig beschränkten Funktionenfolgen noch gewisse Folgerungen aus dem Schwarzschen Lemma. Gerade die Benützung des Schwarzschen Lemmas als Beweismittel bedingt die Beschränkung der Caratheodoryschen Sätze auf Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ des Einheitskreises. Denn Herr Bieberbach hat seinen oben angegebenen, wesentlich allgemeinern Satz lediglich mit dem Montelschen Satze bewiesen. Auf Verallgemeinerungen seines Satzes ist Herr Bieberbach nicht eingegangen, da sein ebenso elementarer wie eleganter Beweis dieselben als reife Frucht in sich birgt. Denn es kommt doch bei dem Beweise von Herrn Bieberbach einzig darauf hinaus, in den Funktionen $f_n(z)$ und ihren Umkehrfunktionen kompakte Funktionenfolgen zu haben.

Dabei sagen wir mit Fréchet,[4]) eine Folge von in einem Gebiete G analytischen Funktionen

1) $$f_1(z),\ f_2(z),\ldots,\ f_n(z),\ldots.$$

ist im Gebiete G kompakt, wenn man aus jeder unendlichen Teilfolge von 1) eine neue unendliche Teilfolge auswählen kann, die innerhalb G gleichmässig konvergiert.

Montel[3]) hat zuerst gezeigt, dass die gleichmässig beschränkten holomorphen Funktionenfolgen kompakt sind. Er[3]) und Caratheodory-Landau[5]) haben dann noch allgemeinere holomorphe kompakte Funktionenfolgen angegeben. Caratheodory-Landau[5]) verdankt man die Kenntnis von meromorphen kompakten Funktionenfolgen. Koebe[6]) und Rémoundos[7]) haben bewiesen, dass mehrdeutige gleichmässig beschränkte Funktionenfolgen auch kompakt sind, der letztere hat dann zu diesen noch allgemeinere kompakte mehrdeutige Funktionenfolgen hinzugefügt. In den Arbeiten von Caratheodory-Landau und Rémoundos findet man auch die

---

[3]) Montel: Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe. Paris. Gauthier-Villars 1910. S. 20—25.

[4]) Fréchet: Sur quelques points du Calcul Fonctionnel. Rendiconti Circ. Mat. Palermo. T. 22. 1906.

[5]) Caratheodory-Landau: Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen. Berliner Berichte. 1911. S. 587—613.

[6]) P. Koebe: Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. II. Mathematische Annalen 69 (1910).

[7]) G. Rémoundos: Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine. Acta mathematica. T. 37. 1914. S. 241 bis 300.

Definitionen der Konvergenz und der gleichmässigen Konvergenz von meromorphen und mehrdeutigen Funktionenfolgen. Alle diese Arbeiten fussen methodisch auf der Arbeit von Montel,[3]) und zwar wird in ihnen unter immer geringeren Bedingungen über eine Funktionenfolge deren Kompaktheit nachgewiesen.

Mit diesen in der Literatur angegebenen kompakten Funktionenfolgen fällt es nicht schwer, eine grosse Zahl von Verallgemeinerungen des Satzes von Herrn Bieberbach aufzustellen, für die auch noch der Beweis des Herrn Bieberbach gilt. Da es bei diesem Beweis notwendig und allerdings auch hinreichend ist, in den Funktionen $f_n(z), n = 1, 2, \ldots$ und in ihren Umkehrungen kompakte Funktionenfolgen zu haben, und da jede kompakte Funktionenfolge gewissen Bedingungen genügen muss, die sich leicht auf die Bereichfolgen B_n und A_n übertragen, so müssen in all diesen durch den Bieberbachschen Beweis vorgezeichneten Sätzen sowohl die Bereiche B_n, die also irgendwie gegen ihren Kern konvergieren, wie auch die Bereiche A_n gewisse Bedingungen erfüllen.

Es zeigt sich nun bei den Anwendungen im II. Kapitel, dass diese Verallgemeinerungen des Satzes von Herrn Bieberbach noch nicht allgemein genug sind.

Man kann aber für die Anwendung geeignetere Sätze wie z. B. Satz VII dieser Arbeit aufstellen, indem man die Bereiche B_n nicht mehr irgendwie, sondern von innen heraus gegen ihren Kern konvergieren lässt. Dadurch erreicht man, dass der Satz des Herrn Bieberbach auch noch gilt, wenn einzig die Funktionen $f_n(z)$ kompakt sind. In diesen Sätzen müssen dann die Bereiche B_n, die also von innen heraus gegen ihren Kern konvergieren, keinen sonstigen Bedingungen genügen. Beim Beweise dieser Sätze zieht man zu den Überlegungen von Herrn Bieberbach zweckmässig noch diejenigen zu, die Koebe[8]) in einem Spezialfall skizziert hat.

Wir setzen einen solchen äusserst anwendungsfähigen Satz hierher, den man aus den Überlegungen auf Seite 33 ff. ablesen kann. Derselbe lautet: Es sollen die Riemannschen Flächen B_n im gleichen Blatt den Nullpunkt — 0^* — als regulären Punkt und

[8]) P. Koebe: Zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung. Leipziger Berichte 1914.

um ihn einen festen endlichen schlichten Kreis im Innern enthalten und von innen heraus gegen ihren Kern B konvergieren.

Bildet dann die Funktion $f_n(z)$ B_n auf einen schlichten Bereich A_n so eineindeutig konform ab, dass $f_n(0^*) = 0$ und $f_n'(0^*) = 1$ ist, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmässige Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ in jedem der Bereiche B_n die Konvergenz der Gebiete A_n gegen ihren Kern A, und die Grenzfunktion der $f_n(z)$ bildet den Kern B auf den Kern A eineindeutig konform ab.

Wir geben im I. Kapitel nur diejenigen Verallgemeinerungen explizit an, die wir im II. Kapitel brauchen. Es genügt für unsere Zwecke, in allen Sätzen $f_n'(0) = 1$ anzunehmen. Man schliesst dadurch nur die Möglichkeit des identischen Verschwindens der Grenzfunktion $f(z)$ und die dadurch nötigen Schlüsse aus.

Die Resultate des I. Kapitels sind mannigfacher Anwendung fähig, hier zeigen wir hauptsächlich ihre Verwendbarkeit bei Kontinuitätsbeweisen im Gebiete der konformen Abbildung, denen das II. Kapitel neben anderm gewidmet ist. Wir benützen in diesem Kapitel die von Herrn Koebe[9]) geprägten Bezeichnungen.

Wir beginnen die Reihe der Kontinuitätsbeweise mit dem Beweise des Schwarzschen Theorems[10]) der konformen Abbildung eines endlichblättrigen einfachzusammenhängenden geradlinig begrenzten Polygons auf einen endlichen schlichten Kreis.

Der Schlaeflische Beweis[11]) aus dem Jahre 1874, welcher den ersten in der Literatur auftretenden Kontinuitätsbeweis darstellt, ist als Schöpfung seiner Zeit unvollständig. Das Hauptresultat dieser originellen Arbeit ist die Berechnung der Funktionaldeterminante.

---

[9]) P. Koebe: Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven IV. Mathematische Annalen 75 (1914).

[10]) H. A. Schwarz: Über einige Abbildungsaufgaben. Journal f. reine und angewandte Mathematik. Bd. 70.

[11]) Schlaefli: Über die allgemeine Möglichkeit der konformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur auf eine Halbebene. Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 78. S. 63—80.

Im Jahre 1888 hat Jules Riemann[12]) bemerkt, dass der Schlaeflische Beweis ungenügend ist; seine Aussetzungen sind trotz der gegenteiligen Meinung von Phragmén[13]) berechtigt. Herr Bieberbach hat zwei Kontinuitätsbeweise[1])[14]) für verzweigungspunktfreie Polygone gegeben.

Mit dem hier in A) gegebenen rein funktionentheoretischen Beweis des obigen Schwarzschen Problems sind mit den Resultaten des I. Kapitels ohne weiteres bekannte Abbildungssätze rein funktionentheoretisch beweisbar.

Im Abschnitt B) des II. Kapitels gehen wir auf diesen Beweis des allgemeinen Abbildungssatzes für einfachzusammenhängende Bereiche und auf den des allgemeinen Uniformisierungsprinzipes von Koebe näher ein. Diese Methode der Polygonapproximation benützt auch Koebe[8]) bei seinen skizzierten funktionentheoretischen Beweisen der beiden soeben genannten Theoreme. Seine Approximationspolygone sind spezieller Art, sie bauen sich nämlich aus endlichvielen unter sich gleich grossen Quadraten auf. Den Nachweis der Abbildbarkeit dieser Polygone auf einen schlichten Kreis führt Koebe durch die Weierstrasssche p-Funktion auf den geschlossener Riemannschen Flächen vom Geschlecht Null auf die schlichte Vollebene zurück, welch letztern Beweis er mit der Kontinuitätsmethode führt. Im Gegensatz zu diesen Beweisen benötigt Caratheodory[15]) bei seinem wohl an Einfachheit nicht zu übertreffenden funktionentheoretischen Beweis des allgemeinen Abbildungssatzes für beliebige einfachzusammenhängende Bereiche die Kontinuitätsmethode nicht, wohl aber den Abbildungssatz für schlichte einfachzusammenhängende Bereiche, während sowohl der von Koebe wie der von mir gegebene Beweis die schlichten Bereiche miterledigt. Herr Caratheodory[2])[15]) beweist allerdings den Abbildungssatz für einfachzusammenhängende schlichte Bereiche mit seinem iterierenden Quadratwurzelverfahren in mehr wie einer Hinsicht auf ideale Weise.

[12]) J. Riemann: Sur le problème de Dirichlet. Annale de lécole normale sup. III. série. T. 5. S. 363—375.

[13]) E. Phragmén: Remarques sur la théorie de la représentation conforme. Acta math. XIV. S. 231—232.

[14]) L. Bieberbach: Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. Rendiconti Circolo Matematico di Palermo. T. XXXVIII (1914).

[15]) C. Caratheodory: Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen. Festschrift für H. A. Schwarz. 1913. S. 19 ff.

In der Theorie der konformen Abbildung endlichvielfach zusammenhängender schlichtartiger Bereiche tritt historisch auch zuerst das Kreisnormierungsproblem auf, d. h. das Problem, einen beliebig begrenzten schlichten oder schlichtartigen $(p+1)$-fach-zusammenhängenden Bereich in einen schlichten von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich eineindeutig konform abzubilden. Dieses Problem findet sich zuerst in Schottkys Doktordissertation[16]). Riemanns nachgelassene Fragmente[17]) zeigen, dass sich Riemann schon früher mit diesem Problem beschäftigt hat. Den Lösungen dieses Kreisnormierungsproblems von Koebe[18]) und Courant[19]) mit der Methode der Überlagerungsfläche und von Koebe[20]) mit seinem iterierenden Verfahren fügen wir in C) zwei verschiedene Kontinuitätsbeweise hinzu.

Unser erster Beweis benützt als wesentliches Beweismittel das Hilbertsche Parallelschlitztheorem[21]) für endlichen Zusammenhang. Dazu bemerken wir nur, dass auch Koebe und Courant bei ihren Beweisen mit der Methode der Überlagerungsfläche das Hilbertsche Parallelschlitztheorem und zwar für unendlich hohen Zusammenhang als wesentliches Hilfsmittel brauchen. Unser erster Beweis des Kreisnormierungstheorems lässt sich ohne weiteres zu einem Beweise des bis heute noch nicht ausführlich bewiesenen allgemeinen Geradenschlitztheorems von Koebe[22]) umschreiben.

Beim zweiten Beweis, dessen erste Anregung ich Herrn Professor Dr. Bieberbach verdanke, zeigt man zuerst mit der Kontinuitätsmethode, dass jedes endlichblättrige schlichtartige $(p+1)$-fachzu-

---

[16]) Schottky: Über konforme Abbildungen mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 83. 1877.

[17]) B. Riemann: Gesammelte Werke. S. 413. I. Auflage.

[18]) P. Koebe: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. I. Teil. Jornal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 138. S. 250 ff.

[19]) R. Courant: Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung. Mathematische Annalen. Bd. 71.

[20]) P. Koebe: Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 19. 1910.

[21]) D. Hilbert: Zur Theorie der konformen Abbildung. Göttinger Nachrichten. 17. Juli 1909.

[22]) P. Koebe: Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung (Voranzeige). Göttinger Nachrichten. 13. Januar 1912.

sammenhängende geradlinig begrenzte Polygon auf einen schlichten Kreisbereich eineindeutig konform abbildbar ist. Einen allgemein begrenzten schlichtartigen $(p+1)$-fachzusammenhängenden Bereich, der unendlichblättrig sein kann, schöpft man durch unendlichviele endlichblättrige Polygone aus, deren jedes auf einen schlichten Kreisbereich eineindeutig konform abbildbar ist. Aus der eineindeutigen konformen Abbildbarkeit der zweckmässig gewählten Approximationspolygone auf schlichte Kreisbereiche folgt dann mit den Sätzen des I. Kapitels auch die des Grenzbereiches in einen schlichten Kreisbereich.

KAPITEL I.

Über die konformen Abbildungen von veränderlichen Gebieten.

1. **Satz I.** Eine unendliche Folge von gleichmässig beschränkten schlichten Gebieten $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ über einer z-Ebene, die alle den Nullpunkt im Innern haben, konvergiere gegen ihren Kern B. In jedem der Gebiete B_n sei eine eindeutige Funktion $f_n(z)$ definiert, für die $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0) = 1$ ist, welche das Gebiet B_n eineindeutig konform auf eine Riemannsche Fläche R_n abbildet. Die R_n seien ebenfalls gleichmässig beschränkt. Konvergieren dann die $f_n(z)$ in jedem der Bereiche B_n gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, so bildet $f(z)$ den Kern B eineindeutig konform auf den Kern R der Riemannschen Flächen R_n ab, und die R_n konvergieren gegen ihren Kern R.

Dabei verstehen wir nach Herrn Caratheodory[23]) unter dem Kern einer den Nullpunkt umschliessenden Gebietsfolge $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ das grösste den Nullpunkt im Innern enthaltende Gebiet, dessen Punkte innere Punkte fast aller Gebiete G_n sind. Gibt es kein solches Gebiet, den Nullpunkt allein. Ferner sagt Herr Caratheodory, eine Gebietsfolge konvergiere gegen ihren Kern, wenn jede Teilfolge denselben Kern hat.

[23]) In der Einleitung auf Seite 5 unter [2]) zitiert.

Beweis: Der elegante und elementare Beweis von Herrn Professor Dr. Bieberbach[24]) für den analogen Satz über schlichte Bereiche lässt sich ohne weiteres auf den obigen Satz übertragen. Man hat einzig an Stelle des Montelschen Auswahlkonvergenzsatzes über eindeutige gleichmässig beschränkte Funktionenfolgen den analogen Satz über mehrdeutige, gleichmässig beschränkte Funktionenfolgen zu benützen. Wir setzen den Beweis von Herrn Professor Dr. Bieberbach für unsern Satz I hierher.

Die Grenzfunktion $w = f(z)$ ist sicher keine Konstante, weil für sie $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ gilt. Sie bildet den Kern B auf eine gewisse Riemannsche Fläche P eineindeutig konform ab, die ein- oder mehrblättrig über einem Teil des Kernes R ausgebreitet ist. (Das Wort Teil einer Menge ist in dieser Arbeit so zu verstehen, dass die ganze Menge auch mit unter diesen Begriff fällt). Es ist vorerst zu zeigen, dass diese Riemannsche Fläche P mit R identisch ist. Den höchstens abzählbar vielen Nullstellen von $f'(z)$ in B entsprechen die algebraischen Verzweigungspunkte von P. B mit Ausschluss der Nullstellen von $f'(z)$ nennen wir B'.

a) Jeder Punkt von B' geht durch $f(z)$ in einen innern Punkt des Kernes R über. Für die markierten Stellen in B folgt dann daraus sofort das gleiche. Sei z_0 ein beliebiger Punkt von B', der durch $w = f(z)$ auf den Punkt w_0 abgebildet sein möge, so können wir z_0 mit $z = 0$ durch einen in B' verlaufenden Streckenzug verbinden, so dass man um jeden Punkt dieses Streckenzuges einen ganz in B' liegenden Kreis schlagen kann, und zwar wählen wir den Radius jedes dieser Kreise so klein, dass ihr durch $w = f(z)$ entworfenes verzweigungsfreies Bild auf der Fläche P schlicht ist. Nach Borel-Lebesgue genügt nun eine Kette von endlichvielen solchen Kreisen, damit jeder Punkt des Streckenzuges im Innern eines dieser Kreise liegt.

Da nun die Funktionen $f_n(z)$ gleichmässig gegen die Grenzfunktion $f(z)$ konvergieren, so sind auch fast alle Näherungsfunktionen $f_n(z)$ im Innern der Kreiskette von Null verschieden, und ferner weicht das Bild der Kreiskette durch $w = f(z)$ nur beliebig wenig von den Bildern durch fast alle $f_n(z)$ ab. Darum liegt ein beliebig grosser Teilbereich des Bildes der Kreiskette durch $w = f(z)$ im verzweigungs-

---

[24]) In der Einleitung auf Seite 5 unter [1]) zitiert.

punktfreien Innern fast aller Flächen R_n und gehört daher mit dem Bildpunkt von $z = 0$, $w^* = 0$, dem Kern R an. Darum ist auch das Bild w_0 des Punktes z_0 ein innerer Punkt des Kernes R.

b) In jedem Punkt w_0, den die Funktion $w = f(z)$ annimmt, konvergieren nun die Umkehrungen $z = \varphi_n(w)$ der Funktionen $w = f_n(z)$ gegen die Umkehrfunktion $\varphi(w)$ von $f(z)$, d. h. für jeden Punkt $w_0 = f(z_0)$ ist $\lim_{n=\infty} \varphi_n(w_0) = \varphi(w_0) = z_0$.

Ein beliebig innerer Punkt z_0 von B' geht nämlich durch $w = f(z)$ nach a) dieses Beweises in einen innern Punkt w_0 des Kernes R über. Ein schlichter Kreis k_ϱ um den Punkt z_0, der ganz in B' liegt, und dessen Radius ρ hinreichend klein gewählt wird, geht durch $w = f(z)$ in eine schlichte Umgebung des Punktes w_0 über. Wegen der gleichmässigen Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen $f(z)$ bilden die $f_n(z)$ bei genügend hoher Wahl von n den Kreis k_ϱ auf schlichte Bereiche ab, die von der durch $f(z)$ gelieferten schlichten Umgebung von w_0 beliebig wenig abweichen, die also fast alle den Punkt w_0 im Innern haben. Diese Näherungsumgebungen von w_0 werden nun durch die Umkehrfunktionen $z = \varphi_n(w)$ auf den schlichten Kreis k_ϱ abgebildet, also werden fast alle Punkte $\varphi_n(w_0)$ dem Kreis k_ϱ mit dem Radius ρ angehören. Da wir nun diesen Radius ρ beliebig klein wählen können, so folgt ohne weiteres, dass der Punkt z_0 der einzige Häufungspunkt der Punkte $\varphi_n(w_0)$ ist, oder also $\lim_{n=\infty} \varphi_n(w_0) = z_0$ und zwar für jeden Punkt w_0, den die Funktion $w = f(z)$ annimmt.

c) Zu diesen Punkten w_0 gehören aber alle Punkte des Kernes R. Denn die Umkehrfunktionen $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \ldots \varphi_n(w), \ldots$ der $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ sind im Kerne R gleichmässig beschränkt. Man kann darum nach Koebe-Rémoundos aus den $\varphi_n(w)$ eine Teilfolge auswählen, die in R gegen eine Grenzfunktion $\varphi(w)$ konvergiert und zwar in jedem Teilbereich von R gleichmässig. Diese Grenzfunktion $\varphi(w)$ ist keine Konstante, denn im Punkte $w^* = 0$, der das Bild von $z = 0$ durch $f_n(z)$ und $f(z)$ ist, hat sie wie ihre Annäherungsfunktionen den Wert Null und ihre Ableitung den Wert Eins. Von den $f_n(z)$ denken wir uns in den folgenden Überlegungen nur noch die zu den ausgewählten $\varphi_n(w)$ als Umkehrfunktionen gehörenden beibehalten.

Wollen wir nun irgend einen Wert w_0 von R untersuchen, ob er

von $f(z)$ angenommen wird oder nicht, so ist in ihm nach dem Vorhergehenden $\varphi(w)$ sicher definiert, und nimmt da einen Wert z_0 an, der, wie man nach a) zeigt, dem Innern des Kernes B angehört. Weiter folgt analog wie unter b) aus $z_0 = \varphi(w_0)$ auch $w_0 = f(z_0)$, d. h. jeder Punkt des Kernes R wird von $f(z)$ angenommen.

d) Nach all dem folgt, dass der Kern B durch die Funktion $f(z)$ auf den ganzen Kern R abgebildet wird, und zwar schlicht und unverzweigt, weil die Umkehrfunktion $\varphi(w)$ von $f(z)$ im ganzen Kern R eindeutig und regulär ist.

e) Die gleichmässige Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ hat die Konvergenz der Riemannschen Flächen R_n gegen ihren Kern zur Folge, denn würden die R_n nicht gegen ihren Kern konvergieren, so könnte man aus den R_n zwei Teilfolgen derart aussondern, dass jede gegen ihren Kern konvergiert, und dass diese beiden Kerne voneinander verschieden sind. Da nun jede Teilfolge der Funktionen $f_n(z)$ gegen dieselbe Funktion $f(z)$ konvergiert, so würde nach d) der Bereich B durch ein und dieselbe Funktion $f(z)$ auf die zwei voneinander verschiedenen Kerne abgebildet, was widersinnig wäre.

2. Umgekehrt kann man nun aus der Konvergenz der Riemannschen Flächen R_n gegen ihren Kern R auf die gleichmässige Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen eine Grenzfunktion schliessen. Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{n=\infty} f_n(z)$ für alle Punkte des Kernes B existiert, die gleichmässige Konvergenz der $_n(z)$ gegen ihre Grenzfunktion folgt daraus leicht mit Montel. Den Beweis führen wir indirekt. Nehmen wir nämlich an, $\lim_{n=\infty} f_n(z)$ würde für einen Punkt des Kernes B nicht existieren, so könnten wir nach Montel aus der Folge $f_n(z)$ zwei unendliche Teilfolgen aussondern, die in B gegen zwei verschiedene Grenzfunktionen gleichmässig konvergierten, die wie die Näherungsfunktionen den Nullpunkt festlassen und dort die Ableitung Eins haben. Diese beiden voneinander verschiedenen Grenzfunktionen würden nun nach dem Vorhergehenden den Kern B auf den Kern R eineindeutig konform abbilden. Dies ist aber nur möglich, wenn es eine von z verschiedene Funktion gibt, die den schlichten beschränkten Bereich B so eineindeutig konform in sich abbildet, dass dabei der Nullpunkt festbleibt und die Ab-

leitung der Funktion dort Eins ist. Eine solche Funktion gibt es aber nach dem Eindeutigkeitssatz des Herrn Bieberbach nicht, also muss entgegen unserer Annahme $\lim_{n=\infty} f_n(z)$ für alle Punkte des Kernes B existieren. Damit haben wir bewiesen den **Satz II:** Die unendlichvielen schlichten, gleichmässig beschränkten Bereiche B_n, die alle den Nullpunkt im Innern haben, konvergieren gegen ihren Kern B. In jedem der Bereiche B_n sei eine Funktion $f_n(z)$ definiert, für die $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0) = 1$ ist, welche B_n auf eine Riemannsche Fläche R_n eineindeutig konform abbildet. Die Riemannschen Flächen R_n seien gleichmässig beschränkt.

Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $f_n(z)$ gleichmässig in jedem Bereiche B_n gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ konvergieren, die, dass die Riemannschen Flächen R_n gegen ihren Kern R konvergieren.

Die Grenzfunktion $f(z)$ bildet dann den Kern B eineindeutig konform auf dem Kern R ab.

Da der Beweis der Sätze I und II ganz symmetrisch in bezug auf die B_n und die R_n resp. die Funktionen $f_n(z)$ und $\varphi_n(w)$ ist, so bleiben diese Sätze auch noch richtig, wenn man in ihnen die B_n und ihre Funktionen $f_n(z)$ mit den R_n und ihren Funktionen $\varphi_n(w)$ vertauscht. Ein näheres Eingehen auf diese Sätze ist wohl nicht nötig.

3. Der Satz I kann nun nach verschiedenen Richtungen verallgemeinert werden, so können an Stelle der schlichten gleichmässig beschränkten Bereiche B_n gleichmässig beschränkte Riemannsche Flächen treten. Der analoge Beweis benützt einzig den Koebe-Rémoundosschen Auswahlkonvergenzsatz. Es gilt also der

Satz III. Eine unendliche Folge von gleichmässig beschränkten Riemannschen Flächen $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ über der z-Ebene, die den Punkt $z = 0$ im Innern haben, konvergiere gegen ihren Kern B. Auf der Fläche B_n sei eine eindeutige analytische Funktion des Ortes $f_n(z)$ erklärt, die in dem für alle B_n festen

Punkte $z^* = 0$ Null wird und dort die Ableitung Eins hat. Durch die Funktion $w = f_n(z)$ werde die Fläche B_n auf eine Riemannsche Fläche R_n über der w-Ebene abgebildet. Die R_n seien ebenfalls gleichmässig beschränkt. Konvergieren nun die $f_n(z)$ auf jeder der Flächen B_n gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, so bildet $f(z)$ die Riemannsche Fläche B eineindeutig konform auf den Kern der Riemannschen Flächen R_n ab, und ausserdem konvergieren die R_n gegen ihren Kern.

Auch der Satz II lässt sich analog verallgemeinern, denn es gilt der folgende **Eindeutigkeitssatz:** Ist F eine beschränkte Riemannsche Fläche über der w-Ebene, die den Punkt $w^* = 0$ im Innern hat, so ist w die einzige Funktion, die F eineindeutig konform in sich abbildet und dabei den Punkt $w^* = 0$ festlässt und dort die Ableitung Eins hat.

Der Beweis geht nach Herrn Bieberbach[25]) unter Benützung des Koebe-Rémoundosschen Auswahlkonvergenzsatzes folgendermassen: Sei nämlich $g(w)$ eine Funktion ungleich w, die F in sich transformiert, $w^* = 0$ festlässt und dort die Ableitung Eins hat, wo also $g(w)$ in der Umgebung von $w^* = 0$ die Entwicklung hat: $g(w) = w + c_m w^m + \ldots$, dabei ist also c_m der erste nicht verschwindende Koeffizient, so bilden wir aus $g(w)$ durch Iteration die Funktionenfolge

$$g_1(w) \equiv g(w);\ g_2(w) \equiv g_1(g(w));\ \ldots\ g_n(w) \equiv g_{n-1}(g(w)); \ldots$$

Diese Funktionen $g_n(w)$ sind auf der Riemannschen Fläche F eindeutige analytische Funktionen des Ortes und dort gleichmässig beschränkt, da sie ja alle die beschränkte Riemannsche Fläche F in sich transformieren. Wir können darum nach Koebe-Rémoundos aus der Folge $g_n(w)$ eine unendliche Teilfolge aussondern, die in F gleichmässig gegen eine beschränkte Funktion konvergiert. Dies ist aber unmöglich, denn die $g_n(w)$ haben in der Umgebung von $w^* = 0$ die Entwicklung: $g_n(w) = w + n\, c_m w^m + \ldots$, die zweiten Koeffizienten wachsen also mit n über alle Grenzen, d. h. es kann keine unendliche Teilfolge der $g_n(w)$ eine beschränkte Grenze haben, also

[25]) Auf Seite 5 zitiert.

führt die Annahme einer Funktion $g(w) \neq w$ mit den obigen Eigenschaften zu einem Widerspruch, d. h. sie ist falsch.

Damit ist aber der Beweis des folgenden Satzes geliefert.

Satz IV: Die unendliche Folge von gleichmässig beschränkten Riemannschen Flächen B_n, $n = 1, 2, \ldots$ über der z-Ebene enthalte den Punkt $z^* = 0$ im Innern und konvergiere gegen ihren Kern B.

Durch die Funktion $w = f_n(z)$, die für $z^* = 0$ Null wird und dort die Ableitung Eins hat, werde B_n auf eine Riemannsche Fläche R_n über der w-Ebene abgebildet. Die R_n seien ebenfalls gleichmässig beschränkt.

Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $f_n(z)$ in jedem der Bereiche B_n gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ konvergieren, die, dass die R_n gegen ihren Kern R konvergieren.

$f(z)$ bildet dann B eineindeutig konform auf den Kern R ab.

4. Die Verallgemeinerung des Satzes I ist durch seinen Beweis vorgezeichnet; es kommt doch einzig bei dem eleganten Beweis von Herrn Bieberbach darauf an, in den Funktionen $f_n(z)$ und ihren Umkehrungen $\varphi_n(w)$ kompakte Folgen zu haben. Jede kompakte Funktionenfolge ist durch gewisse Bedingungen charakterisiert, die sich leicht auf die Bereiche B_n und R_n übertragen lassen. Für solche Bereichfolgen B_n und R_n gilt dann der Satz I.

Gilt dann ferner noch für einen der Kerne der Gebiete B_n resp. R_n der Eindeutigkeitssatz, so kann auch umgekehrt, z. B. wenn die B_n gegen ihren Kern konvergieren, aus der Konvergenz der R_n gegen ihren Kern auf die gleichmässige Konvergenz der $f_n(z)$ geschlossen werden.

5. Wir wollen nun hier noch einige Verallgemeinerungen der Sätze I und II näher angeben, die wir bei den Kontinuitätsbeweisen des Kapitels II brauchen. Bei denselben kommen auch meromorphe Funktionenfolgen vor, von denen Caratheodory-Landau bewiesen haben, dass sie kompakt sind. Der betreffende Satz[26]) von Caratheodory-Landau lautet: Es seien die Funktionen

[26]) Auf Seite 6 zitiert.

1) $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$

für ein schlichtes Gebiet G meromorph.

Es seien k_1, k_2 und k_3 drei positive reelle ganze Zahlen einschliesslich Unendlich, für die

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1 \text{ ist.}$$

Jeder Funktion $f_n(z)$ der Folge 1) seien drei verschiedene komplexe Konstante $a_i^{(n)}$, $(i = 1, 2, 3)$ zugeordnet, so dass erstens für keine Teilfolge n_q, bei der

$$\lim_{n_q = \infty} a_i^{(n_q)} = a_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

existieren, irgend zwei unter den drei Zahlen a_1, a_2, a_3 einander gleich sind; zweitens in dem Gebiete G jede Nullstelle von $f_n(z) - a_i^{(n)}$ ihre Ordnung durch k_i, $(i = 1, 2, 3)$ teilbar hat.

Dann kann man aus jeder Teilfolge von 1) eine neue Teilfolge auswählen, die in B gegen Unendlich oder eine dort meromorphe Funktion konvergiert und zwar in jedem innern Teilbereiche von B gleichmässig.

Unter Benützung dieses Satzes von Caratheodory-Landau zeigt man ohne weiteres, dass wenn in dem Satz I die schlichten gleichmässig beschränkten Bereiche B_n beibehalten werden, an Stelle der gleichmässig beschränkten Riemannschen Flächen R_n solche Riemannsche Flächen gesetzt werden können, deren jede über drei verschiedenen Punkten, $a_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3)$ der w-Ebene in allen ihren Blättern Windungspunkte hat, deren Ordnungen über $a_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3)$ ohne Ausnahme durch k_i, $(i = 1, 2, 3)$ teilbar sein müssen, wo

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1 \text{ ist.}$$

Da weiter für den Kern B der Eindeutigkeitssatz gilt, so können auch im Satz II an die Stelle der gleichmässig beschränkten Riemannschen Flächen R_n die obigen allgemeinern Riemannschen Flächen gesetzt werden.

Diese soeben angedeuteten Sätze enthalten z. B. den Stetigkeits- und den Vollständigkeitsbeweis eines Kontinuitätsbeweises des Grenzkreistheorems für algebraische Funktionen vom Geschlecht Null mit mindestens drei relativen Verzweigungspunkten k_1. k_2 u. k_3. Ordnung, wo

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1 \text{ ist.}$$

Wir geben noch eine weitere Verallgemeinerung des I. Satzes an, die wir im II. Kapitel brauchen, und die sich auch mit dem obigen Satze von Caratheodory-Landau beweisen lässt.

Satz V: In einer z-Ebene seien unendlichviele schlichte Gebiete B_n gegeben, die den Nullpunkt im Innern haben, und von denen jedes mindestens drei voneinander verschiedene Punkte der z-Ebene auslässt. Die Gebiete B_n sollen gegen ihren Kern B konvergieren, der ebenfalls mindestens drei verschiedene Punkte der z-Ebene auslässt.

Jedes der Gebiete B_n sei durch eine Funktion $w = f_n(z)$, die den Nullpunkt festlässt und dort die Ableitung Eins hat, auf ein schlichtes Gebiet R_n einer w-Ebene eineindeutig konform abgebildet, das auch mindestens drei von einander verschiedene Punkte der w-Ebene auslässt.

Konvergieren dann die Funktionen $f_n(z)$ in jedem der Bereiche B_n gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, so bildet $f(z)$ den Kern B auf den Kern R der Gebiete R_n eineindeutig konform ab, und die R_n konvergieren gegen ihren Kern R.

Es gilt nun weiter für diese schlichten Gebiete, deren jedes also mindestens drei verschiedene Punkte seiner Ebene auslässt, der folgende **Eindeutigkeitssatz:** Ist G ein schlichtes Gebiet, das mindestens drei von einander verschiedene Punkte der z-Ebene auslässt, so gibt es ausser z keine Funktion, die einen innern Punkt von G festlässt und dort die Ableitung Eins hat, welche G eineindeutig konform in sich transformiert.

Beweis: Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass einer der von G ausgelassenen Punkte der unendlichferne Punkt und dass der innere fest zulassende Punkt der Nullpunkt sei. Wir beweisen den Satz mit der Methode des Herrn Bieberbach. Nehmen wir nämlich an, es gebe eine Funktion $F(z) \not\equiv z$, die G eineindeutig konform in sich transformiert, dabei den Nullpunkt festlässt und dort die Ableitung Eins hat, so kommen wir auf folgende Weise zu einem Widerspruch. Wir bilden durch Iteration aus $F(z)$ die Folge

$$F_1(z) = F(z);\ F_2(z) = F_1(F(z));\ \ldots F_n(z) = F_{n-1}(F(z));\ldots$$

Diese Folge ist nach dem obigen Caratheodory-Landauschen Satze kompakt, denn jede der Funktionen $F_n(z)$ lässt mindestens drei Punkte aus, weil jede $F_n(z)$ G auf sich abbildet. Wir können aus der Folge $F_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ unendliche Teilfolgen aussondern, die in G wegen der Normierung gegen dort reguläre Funktionen konvergieren. Das ist aber unmöglich, denn $F(z)$ hat in der Umgebung des Nullpunktes die Entwicklung: $F(z) = z + c_m z^m + \ldots$, wo c_m der erste von Null verschiedene Koeffizient bedeutet, also hat $F_n(z)$ als n. Iterierte in der Umgebung des Nullpunktes die Entwicklung: $F_n(z) = z + n\, c_m z^m + \ldots$, d. h. der zweite Koeffizient von $F_n(z)$ wächst mit n über alle Grenzen, und daher kann keine unendliche Teilfolge der $F_n(z)$ in G gegen eine dort reguläre Funktion konvergieren. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme einer Funktion $F(z) \neq z$, die G in sich transformiert, falsch ist.

Wir haben darum als weitere Verallgemeinerung des Satzes II den **Satz VI:** Die unendlich vielen schlichten, den Nullpunkt im Innern enthaltenden Gebiete B_n der z-Ebene, deren jedes mindestens drei voneinander verschiedene Punkte der z-Ebene auslässt, mögen gegen ihren Kern konvergieren, der ebenfalls mindestens drei Punkte auslässt.

In jedem der Gebiete B_n sei eine analytische Funktion $f_n(z)$ definiert, für die $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0) = 1$ ist, welche B_n auf ein schlichtes Gebiet R_n der w-Ebene abbildet, das auch mindestens drei voneinander verschiedene Punkte auslässt.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmässige Konvergenz der $f_n(z)$ in jedem der Bereiche B_n gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ ist die, dass die R_n gegen ihren Kern R konvergieren, der auch mindestens drei Punkte seiner Ebene auslassen muss. $f(z)$ bildet dann den Kern B auf den Kern R eineindeutig konform ab.

Mit diesem Satze beschliessen wir die Verallgemeinerungen des Satzes von Herrn Bieberbach, die durch den Beweis von Herrn Bieberbach vorgezeichnet sind; denn bei diesem Beweis ist es doch nur notwendig und allerdings auch hinreichend, in den Funktionen $f_n(z)$ wie auch in ihren Umkehrungsfunktionen

kompakte Funktionenfolgen zu haben, und da jede kompakte Funktionenfolge gewissen Bedingungen genügen muss, die sich leicht auf die Bereichfolgen R_n und B_n übertragen lassen, so müssen in all diesen Sätzen sowohl die Bereiche B_n, die also irgendwie gegen ihren Kern konvergieren, wie auch die Bereiche R_n gewissen Bedingungen genügen.

Der Satz von Herrn Bieberbach lässt sich nun weiterhin verallgemeinern, wobei der Beweis allerdings einige Überlegungen mehr erfordert, die Koebe*) in einem speziellen Fall skizziert hat. Lässt man nämlich die Bereiche B_n nicht mehr beliebig, sondern von innen heraus gegen ihren Kern konvergieren, so gilt der Satz von Herrn Bieberbach auch noch, wenn nur die Funktionenfolge $f_n(z)$ kompakt ist. In diesen Verallgemeinerungen müssen also nur noch die R_n gewissen Bedingungen genügen, während die B_n lediglich von innen heraus gegen ihren Kern konvergieren müssen.

In allen Verallgemeinerungen des Satzes von Herrn Bieberbach treten die Bereichfolgen B_n und R_n symmetrisch auf.

Wir setzen noch einen solchen für die Anwendung äusserst anwendungsfähigen Satz hierher, dessen Verallgemeinerung auch durch seinen Beweis vorgezeichnet ist.

Satz VII: Seien über der z-Ebene unendlichviele Riemannsche Flächen B_n gegeben, die von innen heraus gegen ihren Kern B konvergieren.

Auf jeder der Riemannschen Flächen B_n sei eine analytische eindeutige Funktion des Ortes $f_n(z)$ definiert, die in einem für alle B_n festen innern Punkte $z^* = 0$ Null wird und dort die Ableitung Eins hat. Durch $f_n(z)$ werde B_n auf einen schlichten Bereich R_n abgebildet. Die Bereiche R_n seien gleichmässig beschränkt.

Konvergieren dann die Funktionen $f_n(z)$ gleichmässig im ganzen Innern jeder Fläche B_n gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, so bildet $f(z)$ den Kern B eineindeutig konform auf den Kern R der Bereiche R_n ab, und die R_n konvergieren gegen ihren Kern R.

Beweis: Durch die nicht konstante Grenzfunktion $f(z)$ wird der Kern B umkehrbar eindeutig und konform auf einen Bereich R^* abgebildet, der nach a) des Beweises von Satz I im Innern des Kernes

*) In der Einleitung unter [8]) zitiert.

R liegt, und der nach b) desselben Beweises oder nach dem Hurwitzschen Theorem[27]) schlicht ist. Wir bemerken hier gleich noch, dass die Näherungsbereiche B_n von B durch $f(z)$ auf Teilbereiche $R^{(n)}$ des beschränkten Bereiches R^* abgebildet werden.

Es ist nun vor allen Dingen zu beweisen, dass R^* mit dem Kern R der R_n identisch ist.

Dies ergibt sich folgendermassen: Da B_n durch $y = f_n(z)$, wo $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0) = 1$ ist, auf den Bereich R_n einer y-Ebene und durch $w = f(z)$, wo $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist, auf den Bereich $R^{(n)}$ einer w-Ebene eineindeutig konform abgebildet ist, so ist dadurch auch eine eineindeutig konforme Abbildung $w = F_n(y)$ des Bereiches R_n auf den Bereich $R^{(n)}$ definiert, so dass der Nullpunkt festbleibt und die Ableitung dort Eins ist.

Da ferner R der Kern der R_n ist, so konvergiert eine unendliche Teilfolge R_{n_q} gegen R als Kern, und da die regulären Funktionen $w = F_n(y)$ gleichmässig beschränkt sind, so konvergiert nach Montel eine unendliche Teilfolge der F_{n_q}, die wir mit $F_{n_r}(y)$ bezeichnen, in jedem der R_{n_q} gleichmässig gegen eine nicht konstante Grenzfunktion $F(y)$, die nach Satz I R auf den Kern K der $R^{(n_r)}$ abbildet. Dieser Kern K ist sicher ein Teilbereich von R^*, da alle $R^{(n)}$ Teilbereiche von R^* sind.

Die Grenzfunktion $F(y)$ ist nun weiter identisch gleich y, denn da der Bereich B_{n_r} für beliebiges n_r sowohl durch die Funktion $f(z)$ wie durch die Funktion $F_{n_r}(y)$, wenn darin $y = f_{n_r}(z)$ gesetzt wird, so auf den Bereich R_{n_r} eineindeutig-konform abgebildet wird, dass der Punkt $z^* = 0$ festbleibt und die Ableitung dort Eins ist, so sind diese beiden Funktionen nach dem Eindeutigkeitssatz auf Seite 15 dieser Arbeit identisch, in Formel ist also für noch so hohes n_r

$$f(z) \equiv F_{n_r}(f_{n_r}(z)).$$

Da nun sowohl $\lim_{n_r = \infty} F_{n_r}(y)$ wie $\lim_{n_r = \infty} f_{n_r}(z)$ gleichmässig existieren, so gilt die obige Bedingung auch für $n_r = \infty$, also ist

$$f(z) \equiv F(f(z)),$$

was nur möglich ist, wenn

$$F(y) \equiv y \text{ ist.}$$

---

[27]) A. Hurwitz: Über die Nullstellen der Besselschen Funktion. Mathematische Annalen. Bd. 33, Seite 248—249.

Alles in allem haben wir bis jetzt gezeigt, dass die Grenzfunktion $w = F(y) \equiv y$ ist und den Kern R der Gebiete R_n eineindeutig konform auf einen Teilbereich K von R^* und damit auch von R abbildet, d. h. es ist

$$R^* = R.$$

Man kann nun weiter aus der gleichmässigen Konvergenz der $f_n(z)$ gegen $f(z)$ wie unter e) des Beweises von Satz I schliessen, dass die R_n gegen ihren Kern R konvergieren müssen, wodurch Satz VII vollständig bewiesen ist.

Umgekehrt kann man auch aus der Konvergenz der R_n gegen ihren Kern R auf die gleichmässige Konvergenz der $f_n(z)$ schliessen, da für den beschränkten Bereich R der Eindeutigkeitssatz gilt, und da die $f_n(z)$ eine kompakte Funktionenfolge bilden. Das Hinschreiben dieser Umkehrung des Satzes VII ist wohl überflüssig.

KAPITEL II.

Kontinuitätsbeweise im Gebiete der konformen Abbildung.

A) Konforme Abbildung endlichblättriger einfachzusammenhängender geradlinig begrenzter Polygone mit endlichvielen innern Verzweigungspunkten endlicher Ordnung auf die schlichte Fläche eines Kreises.

In den Mittelpunkt eines Kontinuitätsbeweises des Satzes, dass man jedes einfachzusammenhängende endlichblättrige mit endlichvielen Verzweigungspunkten versehene geradlinig begrenzte Polygon auf die schlichte Fläche eines Kreises konform abbilden kann, stellt man zweckmässig eine Formel, die zum erstenmale Schlaefli[28]) für Polygone mit Verzweigungspunkten erster Ordnung aufgestellt hat, und die eine logische Verallgemeinerung der bekannten Christoffel-Schwarzschen[29]) Formel bildet.

[28]) Schlaefli: Über die allgemeine Möglichkeit der konformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur auf eine Halbebene. Journal für Mathematik. Bd. 78. S. 63—80 (1874).

[29]) Christoffel: Sul problema delle temperature stationarie e la rappresentazione di una data superficie. Annali di Matemacia. IIa serie, tomo I°, 1867.

1. Wir betrachten zuerst endlichblättrige Polygone, die den Punkt Unendlich weder im Innern noch auf dem Rande haben, für dieselben lautet die Formel:

$$\text{I. } w(z) = \int_0^z \frac{(z-z_1)^{\mu_1-1}\dots(z-z_2)^{\mu_2-1}\dots(z-z_n)^{\mu_n-1}(z-Z_1)^{\lambda_1}\dots}{(-z_1)^{\mu_1-1}\dots(-z_n)^{\mu_n-1}\dots(-Z_1)^{\lambda_1}\dots}$$

$$\frac{(z-Z_m)^{\lambda_m}\dots(z-\bar{Z}_1)^{\lambda_1}\dots(z-\bar{Z}_m)^{\lambda_m}}{(-Z_m)^{\lambda_m}\dots(-\bar{Z}^1)^{\lambda_1}\dots(-\bar{Z}^m)^{\lambda_m}}\,dz$$

Dabei sind:

die $z_\varkappa = r\,e^{i\varphi_\varkappa}$, $(\varkappa = 1, 2 \dots n,)$ n voneinander verschiedene Punkte der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r, wo also $z_\varkappa \neq z_\nu$ $\nu \neq \varkappa$ ist,

die Z_l, $(l = 1, 2 \dots m,)$ m von einander verschiedene Punkte, die alle im Innern der Kreislinie $|z| = r$ liegen, es ist also $|Z_l| < r$ und $Z_l \neq Z_k$ für alle $l, k = 1, 2 \dots m$ und $l \neq k$,

die $\bar{Z}_l$ die Spiegelbilder von Z_l in bezug auf den Kreis $|z| = r$,

die λ_l ganze positive von Null verschiedene endliche reelle Zahlen,

die $\mu_\varkappa$ beliebige positive endliche von Null verschiedene Zahlen.

Die λ_l und $\mu_\varkappa$ müssen nur folgender Bedingung:

$$2\sum_{l=1}^{m}\lambda_l + \sum_{\varkappa=1}^{n}\mu_\varkappa = n - 2 \quad \text{genügen.}$$

Die durch I. erklärte analytische Funktion $w(z)$ bildet die schlichte Fläche des Kreises $|z| \leqq r$ auf ein endlichblättriges einfachzusammenhängendes geradlinig begrenztes n-Eck ab, welches den Nullpunkt als regulären Punkt im Innern enthält, und dessen Innenwinkel gleich $\mu_\varkappa \pi$, $(\varkappa = 1, 2 \dots n)$, sind. Ferner besitzt das Polygon m und nur m innere getrennte Verzweigungspunkte λ_l-*ter* Ordnung, wo $l = 1, 2 \dots m$ ist. Den Punkt Unendlich enthält das Polygon weder in seinem Innern noch auf seinem Rande.

Die Frage ist nun, ob man durch die Formel I bei festgewählten $\mu_\varkappa$ und λ_l, indem man die $z_\varkappa$, die Z_l und den Radius r so variiert, dass sie den obigen Bedingungen genügen, jedes mögliche einfachzusammenhängende endlichblättrige Polygon herausbekommt, bei dem der Nullpunkt innerer regulärer Punkt ist, das von n ganz im Endlichen verlaufenden geradlinigen Strecken begrenzt ist, das die Innenwinkel

$\mu_\varkappa \pi$, $(\varkappa = 1, 2 \ldots n,)$ besitzt, im Innern m getrennte Windungspunkte λ. Ordnung, $l = 1, 2 \ldots m$, hat, und das den Punkt Unendlich nicht im Innern enthält.

Diese Frage ist zu bejahen, wie der folgende Kontinuitätsbeweis zeigt, der eine Übertragung des Beweises von Herrn L. Bieberbach[30]) für die konforme Abbildung eines verzweigungspunktfreien Polygons auf die schlichte Kreisfläche auf den obigen Fall ist.

2. Der Beweis verläuft nun folgendermassen:

Wir betrachten auf der einen Seite die Menge C_P aller endlichblättrigen Polygone mit n geradlinigen, ganz im Endlichen verlaufenden Seiten, den Innenwinkeln $\pi\mu_\varkappa$ und m innern getrennten Windungspunkten λ_l^{ter} Ordnung, $(l = 1, 2 \ldots m)$, bei denen der Nullpunkt regulärer innerer Punkt ist und die den Punkt Unendlich nicht im Innern haben. Jedes der Menge C_P angehörende Polygon besitzt nun ohne Ausnahme eine durch $(n+2m+1)$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbare Umgebung; diese Parameter sind: die komplexe Koordinate des ersten Eckpunktes, der Winkel, den die erste Seite mit der reellen Axe bildet, $n-2$ Seitenlängen, und die komplexen Koordinaten der m Windungspunkte. Weiterhin kann man jedes C_P angehörende Polygon innerhalb C_P in alle andern Polygone von C_P überführen.[31])

Daher ist die Menge C_P ein $(n + 2m + 1)$ dimensionales Gebiet.

Auf der andern Seite betrachten wir die Menge C_F der Formeln I bei festen $\mu_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2 \ldots n$ und λ_l, $l = 1, 2 \ldots$ m. Zu jeder willkürlich gewählten Formel I existiert in C_F eine durch $(n + 2m + 1)$ reelle Parameter eineindeutig darstellbare Umgebung; diese Parameter sind die reellen r, $\varphi_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2 \ldots n$ und die komplexen Z_l, $l = 1, 2 \ldots m$. Nach unsern Voraussetzungen über diese Parameter erfüllt das Wertegebiet der zu allen Formeln I gehörigen Parameter ein $(n + 2m + 1)$ dimensionales Gebiet G.

---

[30]) L. Bieberbach: Über einen Satz des Herrn Caratheodory. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse 1913. S. 559—560.

[31]) A. Schönflies: Über Kreisbogenpolygone. Mathematische Annalen Bd. 42.

Jeder Formel I entspricht nur ein Polygon und ein Polygon wird höchstens von einer Formel I geliefert; denn ausser der Funktion z gibt es keine, die den Kreis vom Radius r_1 auf einen Kreis vom Radius r_2 so eineindeutig konform abbildet, dass dabei der gemeinsame Nullpunkt festbleibt und daselbst die Ableitung Eins hat.

Ändert man in der Formel I den obigen Bedingungen gemäss die Parameter $r, \varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n, Z_1, \ldots Z_m$ stetig, so ändert sich die Formel I und damit auch das zugehörige Bildpolygon stetig; denn der Integrand in dem Integral I ist eine stetige Funktion von z, r, den $\varphi_\varkappa$ und den Z_l und damit das Integral I eine stetige Funktion von r, den $\varphi_\varkappa$ und den Z_l.

Die Polygone, die man durch alle Formeln I erhält, kurz Formelpolygone genannt, erfüllen also in C_P eine gewisse Teilmenge C_B. Diese Menge C_B steht, wie wir oben bewiesen haben, in eineindeutiger stetiger Beziehung zu dem zu den Formeln I gehörigen Parametergebiet G. C_B ist also nach dem Brouwerschen Satze von der Invarianz des Gebietes,[32]) ein $(n+2m+1)$ dimensionales Gebiet, d. h. wir können, ohne C_B zu verlassen, irgend zwei Formelpolygone ineinander überführen und, was in der Folge von einschneidender Bedeutung ist, alle Nachbarpolygone jedes willkürlich gewählten Formelpolygons, sofern man sich auf eine genügend kleine Umgebung beschränkt, sind auch Formelpolygone.

Erfüllt nun das Gebiet C_B der Formelpolygone das Polygongebiet C_P vollständig, so sind wir mit dem Beweis zu Ende; denn dann ist doch jedes Polygon aus C_P Formelpolygon.

Im andern Falle, wo die Formelpolygone nicht alle Polygone aus C_P liefern, muss C_B in C_P Grenzen haben. Diese Grenzen bestehen aus innern Polygonen von C_P, wir bezeichnen sie kurz mit P, die keine Formelpolygone sind; denn wegen der Gebietseigenschaft von C_B liegt jedes Formelpolygon im Innern von C_B; wohl aber gibt es zu jedem P eine unendliche Folge von Formelpolygonen, die gegen P konvergieren. Dann ist aber P auch ein Formelpolygon, wie wir unten zeigen werden, also muss es im Innern von C_B liegen und nicht auf der Grenze von C_B in C_P. Unsere Annahme, dass C_B C_P nicht vollständig ausfüllt, führt uns also zu einem Widerspruch, somit ist jedes Polygon aus C_P Formelpolygon.

---

[32]) L. E. J. Brouwer: Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. Mathematische Annalen. Bd. 72.

Wir müssen jetzt noch den Beweis des Limessatzes nachholen, den wir so formulieren dürfen: Jedes Polygon P aus C_P, gegen das unendlichviele Formelpolygone $P_1, P_2, \ldots P_q \ldots$ konvergieren, ist auch ein Formelpolygon. Wir können die P_q, die nach der Terminologie von Herrn Caratheodory gegen P als Kern konvergieren, als gleichmässig beschränkt annehmen, denn ist dies noch nicht der Fall, so geht man durch lineare Funktionen, die den Nullpunkt der w-Ebene festlassen und dort die Ableitung Eins haben, zu einer gleichmässig beschränkten Gebietsfolge über. Dabei geht nur die Geradlinigkeit der Begrenzung verloren, die im folgenden nicht als Beweismittel benötigt wird. Da die Polygone P_q, gleichmässig beschränkt und endlichblättrig sind und den Nullpunkt als innern Punkt enthalten, so liegen ihre Inhalte unterhalb einer festen positiven Schranke. Daraus folgt nach dem Satze von Herrn Bieberbach,[33]) dass die Inhalte und damit auch die Radien der Bildkreise K_q der Polygone P_q, die zu den normierten Formeln I gehören, unterhalb einer festen endlichen positiven Zahl liegen. Da ferner alle Polygone P_q einen den Nullpunkt umschliessenden festen endlichen Kreis im Innern haben, so folgt nach demselben Satze von Herrn Bieberbach, dass die Radien der Kreise K_q oberhalb einer festen positiven endlichen Zahl liegen. Wir greifen nun aus der Folge der konzentrischen gleichmässig beschränkten Kreise K_q um den Nullpunkt eine unendliche Teilfolge $K_1, K_2, \ldots K_q, \ldots$ heraus, die gegen einen Kreis K mit endlichem Radius als Kern konvergiert. Nach dem Satze II des I. Kapitels konvergieren dann die Formeln I, welche die K_q auf die P_q abbilden, wir bezeichnen sie mit $w_q(z)$, in K gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $W(z) = \lim_{q=\infty} w_q(z)$, die den Grenzkreis K auf das Grenzpolygon P eineindeutig konform abbildet. Diese Grenzfunktion $W(z)$ ist weiter eine Formel von der Gestalt I; denn seien die Parameter der Formel $w_q(z)$ mit $r^{(q)}$, $\varphi_\varkappa{}^{(q)}$, $(\varkappa = 1, 2 \ldots n)$ und $Z_l{}^{(q)}$, $(l = 1, 2 \ldots m)$ bezeichnet, so hängen

[33]) Derselbe lautet: Ein Kreis wird durch eine in ihm reguläre Funktion, die in seinem Mittelpunkte den Abbildungsmodul Eins hat, auf einen Bereich mit grösserem (inneren) Inhalt abgebildet. Siehe L. Bieberbach: „Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 23. November 1913.

doch die $w_q(z)$ eineindeutig und stetig von diesen endlichvielen Parametern ab. Diese Parameter sind gleichmässig beschränkt: Für die $r^{(q)}$ haben wir es oben gezeigt, daraus folgt es dann für die $Z_l^{(q)}$, da dieselben innerhalb der Kreise K_q mit den Radien $r^{(q)}$ liegen, und für die $\varphi_\varkappa^{(q)}$ gilt doch $0 < \varphi_\varkappa^{(q)} \leqq 2\pi$. Die Folgen $r^{(q)}$, $Z_l^{(q)}$, $(l = 1,2 \ldots m)$ $\varphi_\varkappa^{(q)}$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots n)$ sind also kompakt. Wir können somit aus der Folge $r^{(q)}$ eine unendliche Teilfolge $r^{(q_{s_1})}$ so aussondern, dass $\lim\limits_{s_1 = \infty} r^{(q_{s_1})} = r^{(\infty)}$ existiert; dann können wir aus der Folge $Z_1^{(q_{s_1})}$ eine unendliche Teilfolge $Z_1^{(q_{s_2})}$ auswählen, so dass $\lim\limits_{s_2 = \infty} Z_1^{(q_{s_2})} = Z_1^{(\infty)}$ existiert. Indem wir auf diese Weise fortfahren, kommen wir nach $(n+m+1)$-maligem Auswählen zu einer unendlichen Teilfolge $q_{s_{n+m+1}} = q_x$ von q, so dass $\lim\limits_{x = \infty} r^{(q_x)} = r^{(\infty)}$, $\lim\limits_{x = \infty} Z_\lambda^{(q_x)} = Z_\lambda^{(\infty)}$, $\lambda = 1, 2 \ldots m$; und $\lim\limits_{x = \infty} \varphi_\varkappa^{(q_x)} = \varphi_\varkappa^{(\infty)}$ $\varkappa = 1, 2 \ldots n$ existiert.

Die Formeln $w_{q_x}(z)$ konvergieren nun gleichmässig als Teilfolge der $w_q(z)$ gegen eine Formel, deren Parameter $r^{(\infty)}$; $\varphi_\varkappa^{(\infty)}$, $\varkappa = 1, 2 \ldots n$; und $Z_l^{(\infty)}$, $l = 1, 2 \ldots m$, sind, und die mit der Grenzfunktion $W(z)$ der $w_q(z)$ identisch ist. Diese Formel $W(z)$, die also das Polygon P liefert, ist eine unserer Formeln I; denn in ihr hat $r^{(\infty)}$ einen festen positiven endlichen Wert, dann können keine der $\varphi_\varkappa^{(\infty)}$ zusammenrücken; auch können keine der $Z_l^{(\infty)}$ zusammenfallen, noch auf den Kreis K mit dem Radius $r^{(\infty)}$ noch dort in ein $z_\varkappa = r^{(\infty)} e^{i\varphi_\varkappa^{(\infty)}}$ rücken; denn im ersten Fall würde die Formel ein Polygon mit höchstens $(n-1)$ Ecken und in den andern Fällen mit höchstens $(m-1)$ innern Windungspunkten liefern, also sicher nicht das innere Polygon P von C_P. Hiermit haben wir einen vollständigen Beweis dafür, dass jedes im Innern von C_P gelegene Polygon P, das Grenze von Formelpolygonen ist, selbst ein Formelpolygon ist.

3. Wir gehen nun zum Beweis über, dass jedes Polygon, dessen Ecken im Endlichen liegen, dessen Seiten aber endlichvielmal durch den unendlichfernen Punkt ziehen können, und das den Punkt Unendlich endlichvielmal im Innern hat, eineindeutig und konform auf einen schlichten Kreis abbildbar ist.

Zuerst betrachten wir Polygone, die den unendlichfernen

Punkt nur im Innern und zwar als regulären Punkt haben, deren Seiten also ganz im Endlichen verlaufen.

Die Schlaeflische Formel lautet in diesen Fällen:

$$\text{II. } w(z) = \int_0^z \frac{\prod_{\varkappa=1}^{n}(z-z_\varkappa)^{\mu_\varkappa-1}\prod_{l=1}^{m}(z-Z_l)^{\lambda_l}(z-\bar{Z}_l)^{\lambda_l}\prod_{\pi=1}^{p}(z-\mathfrak{Z}_\pi)^{-2}}{\prod_{\varkappa=1}^{n}(-z_\varkappa)^{\mu_\varkappa-1}\prod_{l=1}^{m}(-Z_l)^{\lambda_l}(-\bar{Z}_l)^{\lambda_l}\prod_{\pi=1}^{p}(-\mathfrak{Z}_\pi)^{-2}} \cdot \frac{(z-\mathfrak{Z}_\pi)^{-2}}{(-\bar{\mathfrak{Z}}_\pi)^{-2}}\,dz.$$

Diese Formel besitzt ausser den in Formel I charakterisierten Parametern: $z_\varkappa = r\,e^{i\varphi_\varkappa}$; $\mu_\varkappa$; $(\varkappa = 1, 2 \ldots n)$; $\bar{Z}_l$ und Z_l; λ_l; $(l = 1, \ldots m)$; noch die p voneinander und von den Z_l verschiedenen komplexen Parameter $\mathfrak{Z}_\pi$, $(\pi = 1, 2 \ldots p)$, die sämtlich im Innern des Kreises $|z| = r$ liegen und ihre Spiegelbilder $\bar{\mathfrak{Z}}_\pi$, $(\pi = 1, \ldots p)$, in bezug auf diesen Kreis.

Die positiven reellen $\mu_\varkappa$, $(\varkappa = 1, \ldots n)$ und λ_l, $(l = 1, \ldots m)$ müssen jetzt aber der Bedingung

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa + 2\sum_{l=1}^{m} \lambda_l = n - 2 + 4p$$

genügen.

Die durch die Formel II erklärte Funktion $w(z)$ hat nun in der Umgebung eines Stigmas $\mathfrak{Z}_\pi$, $(\pi = 1, 2 \ldots p)$, die Entwicklung:

$$w(z) = \frac{c_{\pi-1}}{z-\mathfrak{Z}_\pi} + c_\pi \log(z-\mathfrak{Z}_\pi) + c_{\pi 1}(z-\mathfrak{Z}_\pi) + \ldots,$$

wo

$$c_{\pi-1} = -(\mathfrak{Z}_\pi - \bar{\mathfrak{Z}}_\pi)^{-2}\prod_{s}^{s}(\mathfrak{Z}_\pi - s)^{l_s} \text{ und}$$

$$c_\pi = (\mathfrak{Z}_\pi - \bar{\mathfrak{Z}}_\pi)^{-2}\prod_{s}^{s}(\mathfrak{Z}_\pi - s)^{l_s}\left(\sum_s \frac{l_s}{\mathfrak{Z}_\pi - s} - \frac{2}{\mathfrak{Z}_\pi - \bar{\mathfrak{Z}}_\pi}\right)$$

ist, und wo unter s alle Stigmata in der Formel II ausser dem betrachteten $\mathfrak{Z}_\pi$ und $\bar{\mathfrak{Z}}_\pi$ und unter l_s ihre zugehörigen Exponenten verstanden sind. Ist also $c_\pi \neq 0$, so hat $w(z)$ im Punkte $z = \mathfrak{Z}_\pi$ einen logarithmischen Pol. In diesem Falle stanzen wir den Kreis $|z - \mathfrak{Z}_\pi| \leq \varepsilon$ aus, und machen die gelochte Kreisfläche $|z| \leq r$ durch einen z. B. von z_1 ausgehenden Schnitt wieder einfachzusammenhängend.

Uns interessieren nun diejenigen Formeln II, in denen entweder alle $c_\pi = 0$ oder alle $c_\pi \neq 0$, $\pi = 1, 2, \ldots p$, sind.

Im ersten Falle, wo wir also eine Formel II haben, in der alle $c_\pi = 0$ sind, die wir dann kurz eine Formel II_1 nennen, wird die schlichte Kreisfläche $|z| \leq r$ durch die Formel II_1 eineindeutig konform auf ein geradlinig begrenztes n-Eck mit den Innenwinkeln $\mu_\varkappa \pi$ abgebildet, das den Nullpunkt als regulären Punkt und den Punkt Unendlich p-mal und zwar als regulären Punkt im Innern, nicht aber auf dem Rande hat, und das ferner m getrennte innere Verzweigungspunkte λ_l. Ordnung besitzt.

Im andern Falle, wo also in einer Formel II alle $c_\pi \neq 0$ sind, die wir dann kurz als eine Formel II_2 bezeichnen, stanzen wir alle Punkte $z = \mathfrak{z}_\pi$, $(\pi = 1, 2 \ldots p)$, durch ε-Kreise aus und machen die gelochte Kreisfläche $|z| \leq r$ durch voneinander getrennt verlaufende Schnitte, die z. B. alle von z_1 ausgehen, wieder einfachzusammenhängend.

Die Formel II_2 $w(z)$ bildet dann die so aufgeschnittene Kreisfläche $|z| \leq r$ auf ein endlichblättriges n-Eck eineindeutig konform ab, das sich von einem durch eine Formel II_1 gelieferten Polygon nur dadurch unterscheidet, dass durch dasselbe vom Bildpunkte von z_1, der Ecke w_1, p getrennte Kluften mit parallelen Rändern von den Breiten c_π, $(\pi = 1, 2 \ldots p)$ gegen die p unendlichfernen Punkte ziehen, diese selbst in p Kurven umkreisend. Ein solches n-Eck, das den Punkt Unendlich weder auf dem Rande noch im Innern hat, nennen wir mit Schlaefli kurz ein zerklüftetes Polygon.

4. Wir zeigen nun zuerst mit der Kontinuitätsmethode, dass jedes oben charakterisierte zerklüftete Polygon durch eine Formel II_2 geliefert wird, oder dass jedes solche zerklüftete Polygon durch die Umkehrfunktion einer Formel II_2 auf einen endlichen schlichten Kreis eineindeutig konform abbildbar ist. Diesen Beweis führt man gleich wie den analogen Beweis für die Formel I.

Zum Beweise betrachten wir auf der einen Seite die Menge aller zerklüfteten, von n ganz im Endlichen gelegenen geradlinigen Strecken begrenzten Polygone mit den festen Innenwinkeln $\mu_\varkappa \pi$, $\varkappa = 1, 2, \ldots n$, mit m innern getrennten Verzweigungspunkten von vorgegebener fester Ordnung λ_l, $(l = 1, 2, \ldots m)$ und mit p Kluften endlicher Breite,

die den Nullpunkt mindestens einmal als regulären Punkt im Innern haben, und die den unendlichfernen Punkt weder im Innern noch auf dem Rande enthalten. Diese Menge bildet ein Kontinuum C_P, das zu jedem ihm angehörigen Polygon ohne Ausnahme eine durch $(n + 1 + 2m + 2p)$ reelle Parameter eineindeutig stetig darstellbare Umgebung besitzt, und zwar liefern die n-Ecken $n + 1$, die m Verzweigungspunkte $2m$, und die p Verschiebungsvektoren der p Kluften $2p$ reelle Parameter.

Auf der andern Seite betrachten wir die Menge C_F der Formeln Π_2 bei festen Exponenten. Jede willkürlich gewählte Formel Π_2 besitzt in C_F eine durch $(n + 1 + 2m + 2p)$ reelle Parameter eineindeutig darstellbare Umgebung. Diese reellen Parameter sind nämlich je einer von $r, z_1, \ldots z_n$, und je zwei von $Z_1, Z_2, \ldots Z_m$ und $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_p$. Das Wertegebiet dieser zu allen Formeln Π_2 gehörenden Parameter bildet ein $(n + 1 + 2m + 2p)$ dimensionales Gebiet G.

Da nun jede Formel Π_2 ein und nur ein zerklüftetes Polygon liefert, und einem Polygon nach dem Unitätssatze höchstens eine Formel Π_2 entsprechen kann, da ferner bei einer stetigen Änderung der Parameter in der Formel Π_2 sich die Formel Π_2 und damit auch das Bildpolygon stetig ändert; (denn der Integrand im Integral Π_2 ist eine stetige Funktion von z und den variablen Parametern, also ist das Integral Π_2 selbst eine stetige Funktion der variablen Parameter); so bilden die Polygone in C_P, die durch die Formeln Π_2 geliefert werden, kurz Formelpolygone genannt, als eineindeutiges stetiges Bild des $(n + 1 + 2m + 2p)$ dimensionalen Parametergebietes G nach dem Brouwerschen Satze von der Invarianz des Gebietes wieder ein $(n + 1 + 2m + 2p)$ dimensionales Gebiet C_B. Dieses Gebiet C_B der Formelpolygone ist nun notwendig mit dem Polygonkontinuum C_P identisch. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste, da C_B sicher ein Teil von C_P ist, C_B in C_P Grenzen haben. Diese Grenzen würden aus Polygonen P von C_P gebildet, die nicht zu C_B gehören können, weil C_B als Gebiet nur aus innern Punkten besteht. Wohl aber konvergieren gegen jedes Polygon P, das auf der Grenze von C_B in C_P liegt, unendlichviele Formelpolygone. Dann sagt aber unser gleich zu beweisende Limessatz, dass das Grenzpolygon P auch ein Formelpolygon ist, und somit dem Innern von C_B angehört, was ein Widerspruch ist, also kann C_B keine Grenzen in C_P haben, C_B muss mithin das ganze Polygonkontinuum C_P ausfüllen,

oder in andern Worten, jedes Polygon aus C_P wird durch eine Formel II_2 geliefert.

Wir haben jetzt noch den Beweis des Limessatzes nachzuholen; der Limessatz lautet: Jedem Polygon P aus C_P, gegen das unendlichviele Formelpolygone $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ konvergieren, entspricht notwendig auch eine Formel II_2.

Zum Beweise[34]) dürfen wir die zerklüfteten Formelpolygone P_n über der w-Ebene, die also gegen das zerklüftete Polygon P als Kern konvergieren, als gleichmässig beschränkt annehmen, denn sonst würden wir durch lineare Transformationen der w-Ebene, die $w = 0$ festlassen und dort die Ableitung Eins haben, zu gleichmässig beschränkten Kreisbogenpolygonen übergehen, was an unsern weitern Schlüssen nichts ändert, da dieselben die geradlinige Begrenzung der P_n gar nicht benützen. Bezeichnen wir die Formel II_2, die das Polygon P_n liefert, oder die also den schlichten Kreis K_n um den Nullpunkt auf das Polygon P_n eineindeutig konform abbildet, mit $w_n(z)$, wo also $w_n(0) = 0$ und $w'_n(0) = 1$ ist, so liegen nach einem Satze von Herrn Bieberbach[35]) die Radien der konzentrischen Bildkreise K_n zwischen zwei festen positiven endlichen Grenzen. Wir können darum aus der Folge der Kreise K_n eine unendliche Teilfolge K_{n_q} aussondern, die gegen einen endlichen schlichten Grenzkreis K als Kern konvergiert. Nach Satz II des I. Kapitels müssen dann die Formeln $w_{n_q}(z)$ in K gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $W(z)$ konvergieren, die den endlichen Grenzkreis K auf das zerklüftete Polygon P eineindeutig konform abbildet, dabei den Nullpunkt festlässt und dort die Ableitung Eins hat. Weiter zeigt der Schluss auf Seite 27—28, dass die Grenzfunktion $W(z)$ der Formeln $w_{n_q}(z)$ wieder eine Formel II ist. Zudem erfüllen deren Parameter die p Ungleichungen $c_\pi \neq 0$, $(\pi = 1, 2 \ldots p,)$; denn wären nicht alle $c_\pi \neq 0$, so würde $W(z)$ ein Polygon mit weniger als p Kluften liefern, also sicher nicht das Polygon P aus C_P, also muss $W(z)$ eine Formel II_2 sein. Damit ist der volle Beweis erbracht, dass jedes Grenzpolygon von Formelpolygonen, das in C_P liegt, selbst Formelpolygon ist, und damit, dass alle Polygone aus C_P Formelpolygone sind.

---

[34]) An Stelle dieses Beweises kann auch der allgemeinere auf Seite 33—35 treten, bei welchem die hier eventuell nötigen Hilfsabbildungen durch lineare Funktionen nicht nötig sind.

[35]) Auf Seite 27 zitiert.

5. Mit dem soeben bewiesenen Satze, dass man mit der Formel Π_2 jedes vorgegebene endlichblättrige zerklüftete n-Eck erhalten kann, zeigen wir weiter, dass jedes endlichblättrige von ganz im Endlichen verlaufenden geradlinigen Seiten begrenzte n-Eck P mit den Innenwinkeln $\mu_\varkappa\pi$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots n)$, mit m innern Windungspunkten λ_l-ter Ordnung, $(\lambda = 1, 2 \ldots m)$, das in seinem Innern den Nullpunkt mindestens einmal und den unendlichfernen Punkt p-mal und nur p-mal und zwar als regulären Punkt enthält, durch die Umkehrung einer Funktion Π_1 auf einen schlichten Kreis eineindeutig konform abbildbar ist.

Zum Beweise approximieren wir ein solches sonst beliebiges n-Eck P von innen heraus durch zerklüftete n-Ecke $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$, welche die gleichen Innenwinkel und die gleichen Windungspunkte mit denselben Ordnungen wie P haben.

Jedes dieser zerklüfteten, auf P schlicht ausgebreiteten Polygone P_n ist nun durch die Umkehrfunktion $z_n(w)$ einer Formel Π_2 auf einen schlichten Kreis K_n um den Nullpunkt eineindeutig konform abbildbar, wobei in dem für alle P_n festen regulären innern Punkte $w = 0^*$ $z_n(0^*) = 0$ und $z_n'(0^*) = 1$ ist.

Da die einwertigen Funktionen $z = z_n(w)$ nach einem Verzerrungssatze von Herrn Koebe[36]) innerhalb der Bereiche $P_n - k$, wo k ein fester in P_1 liegender schlichter endlicher um $w = 0^*$ gezogener Kreis ist, keine Werte z annehmen, die innerhalb eines festen von n unabhängigen endlichen um $z = 0$ gezogenen Kreises $\mathfrak{k}$ liegen, so sind die $z_n(w)$ nach Remoundos[37]) vorerst in $P - k$ kompakt, d. h. es konvergiert eine unendliche Teilfolge $z_{n_q}(w)$ in $P - k$ gleichmässig. Dann konvergiert aber die Folge $z_{n_q}(w)$ im ganzen Innern von P gleichmässig und zwar gegen eine nicht konstante Grenzfunktion $Z = Z(w)$, da für sie $Z(0^*) = 0$ und $Z'(0^*) = 1$ ist; denn die $z_{n_q}(w)$ konvergieren doch gleichmässig auf der Peripherie eines zu k konzentrischen schlichten Kreises k', wo $k' > k$ ist, und sind zudem noch in k' regulär, also konvergieren die $z_{n_q}(w)$ nach einem Weierstrasschen Satze auch im abgeschlossenen Kreise k' gleichmässig.

---

[36]) Koebe: Mathematische Annalen. Bd. 67. S. 215.

[37]) Auf Seite 6 unter [7]) zitiert.

Wir wollen nun die Abbildung studieren, welche die analytische Grenzfunktion $Z = Z(w) = \lim_{q=\infty} z_{n_q}(w)$ von dem n-Eck P entwirft. Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, dass der Kern K der schlichten konzentrischen Kreise K_{n_q} um den Nullpunkt die mit n_q wegen $P_n < P_{n+a}$, $a > 0$, wachsen, notwendig ein schlichter Kreis um den Nullpunkt mit endlichem oder mit unendlichem Radius ist.

Ist nun der Kern K ein schlichter Kreis mit endlichem Radius, so folgt ohne weiteres nach dem Satze VII des I. Kapitels, dass die Grenzfunktion $Z = Z(w)$ das Polygon P eineindeutig konform auf den Kern K abbildet.

Ist dagegen der Kern K ein schlichter Kreis um den Nullpunkt mit unendlichgrossem Radius oder also die ganze Ebene mit Ausschluss des unendlichfernen Punktes, so können wir nicht ohne weiteres den Satz VII des I. Kapitels anwenden, wohl aber zeigen die für diesen Fall leicht übertragbaren Überlegungen des Beweises von Satz VII, dass auch jetzt die Grenzfunktion $Z = Z(w)$ das Polygon P auf den Kern K, d. h. auf die punktierte Ebene, eineindeutig konform abbildet.

Dieser Beweis verläuft folgendermassen: Nach a) des Beweises von Satz I des I. Kapitels und nach dem Hurwitzschen Theorem[38]) wird das Poylgon P durch die Grenzfunktion $Z = Z(w)$ auf einen schlichten einfachzusammenhängenden Teilbereich K' von K eineindeutig konform abgebildet. Die P_{n_q} gehen dabei in Teilbereiche K'_{n_q} von K' über.

Da nun P_{n_q} durch $z = z_{n_q}(w)$, wo $z_{n_q}(0^*) = 0$ und $z'_{n_q}(0^*) = 1$ ist, auf K_{n_q} und durch $Z = Z(w)$, wo $Z(0^*) = 0$ und $Z'(0^*) = 1$ ist, auf K'_{n_q} eineindeutig konform abgebildet wird, so ist dadurch auch eine eineindeutige konforme Abbildung $Z = F_{n_q}(z)$ zwischen K_{n_q} und K'_{n_q} gegeben, wo $F_{n_q}(0) = 0$ und $F'_{n_q}(0) = 1$ ist. Weiter zeigt man ganz gleich wie bei den Funktionen $z_n(w)$, dass die Folge der Funktionen $Z = F_{n_q}(z)$ wie auch die Folge ihrer Umkehrfunktionen in K respektive in K'' kompakt ist, wo K'' den Kern der K'_{n_q} bedeutet.

Daraus folgt dann aber mit den im I. Kapitel angegebenen Schlüssen von Herrn Bieberbach, dass die in K existierende Grenz-

[38]) Auf Seite 22 unter [27]) zitiert.

funktion $Z = F(z)$ einer unendlichen Teilfolge der $Z = F_{n_q}(z)$ K eineindeutig konform auf den Kern K'' der K'_{n_q} abbildet, der wegen $K'_{n_q} < K'$ ein Teilbereich von K' ist.

Da weiter K'' als einfachzusammenhängender schlichter Bereich der Z-Ebene mit mindestens einem Randpunkt nur durch Z so in sich eineindeutig konform abbildbar ist, dass der Nullpunkt festbleibt und der Abbildungsmodul dort Eins ist, so ist $Z = F(z)$, da $F(0) = 0$ und $F'(0) = 1$ ist, nach dem Schlusse auf Seite 22 identisch gleich Z. Mithin ist $K'' = K$, also muss, weil $K'' < K' < K$ ist, $K' \equiv K$ sein, d. h. in Worten: der Bildbereich K', auf den das Polygon P durch die Grenzfunktion $Z = Z(w)$ eineindeutig konform bezogen ist, füllt den Kern K, d. h. die ganze Ebene mit Ausschluss des unendlichfernen Punktes vollständig aus, w. z. b. w.[39])

Bis jetzt wissen wir also, dass die Grenzfunktion $Z = Z(w)$ das geradlinig begrenzte n-Eck P auf einen schlichten Kreis K entweder mit endlichem oder unendlichem Radius eineindeutig konform abbildet. Der letztere Fall ist nun unmöglich, denn wäre das geradlinig begrenzte n-Eck P durch $Z = Z(w)$ auf die ganze Ebene mit Ausschluss des unendlichfernen Punktes eineindeutig konform abgebildet, so würde, um den Gedankengang eines Koebeschen Beweises[40]) anzugeben, die auf P eindeutige analytische Funktion $\frac{1}{Z(w)}$ bei der Annäherung an einen beliebigen von den Eckpunkten verschiedenen Punkt der geradlinigen Begrenzung von P stetig in den Wert Null übergehen, also müsste $\frac{1}{Z(w)}$ nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze von H. A. Schwarz identisch gleich Null sein, was offenbar nicht der Fall ist, also kann $Z = Z(w)$ das Polygon P nicht auf die punktierte Ebene eineindeutig konform abbilden.

Die Grenzfunktion $Z = Z(w)$, welche also das vorgegebene n-Eck auf einen endlichen schlichten Kreis K um den Nullpunkt eineindeutig konform abbildet, ist nun weiter die Umkehrung einer Formel II_1, denn die Umkehrungsfunktionen der $z_{n_q}(w)$,

---

[39]) Diese Überlegungen mit denen von § 2 des I. Kapitels reichen hin, um den in der Einleitung auf Seite 8 formulierten Satz zu beweisen.

[40]) P. Koebe: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Göttinger Nachrichten. 12. Mai 1907.

die Formeln $II_2\ w_{n_q}(z)$ konvergieren gleichmässig in K nach b) des Beweises von Satz I im I. Kapitel gegen die Umkehrfunktion $w(Z)$ von $Z(w)$, und dass diese Funktion $w(Z)$, die also den Kreis K auf das n-Eck P eineindeutig konform abbildet, eine Formel II_1 ist, sieht man wie auf Seite 28 ein, denn die Formeln $II_2\ w_{n_q}(z)$ konvergieren wieder gegen eine Grenzformel von der Gestalt II, weil die $w_{n_q}(z)$ stetig von ihren gleichmässig beschränkten Parametern $r, z_1, \ldots z_n, Z_1, \ldots, Z_m, \mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_p$ abhängen. Zudem erfüllen dann die Parameter in der Grenzformel, welche mit $w(Z)$ identisch sein muss, alle für eine Formel II aufgestellten Bedingungen. Überdies erfüllen sie aber noch die p Gleichungen $c_\pi = 0$, $(\pi = 1, 2 \ldots p)$, denn wären nicht alle $c_\pi = 0$, so würde die zu diesen Parametern gehörige Formel II, die gleich $w(Z)$ ist, ein Polygon liefern, das den Punkt Unendlich weniger wie p mal als regulären Punkt im Innern hat, also sicher nicht das Polygon P.

Damit ist in allen Teilen bewiesen, dass jedes endlichblättrige oben charakterisierte n-Eck P durch die Umkehrfunktion einer Formel Π_1 auf einen endlichen schlichten Kreis eineindeutig konform abbildbar ist.

6. Wir gehen nun noch mit einigen Worten auf den Beweis der Abbildbarkeit von Polygonen auf einen schlichten endlichen Kreis ein, die sich von den soeben behandelten n-Ecken nur dadurch unterscheiden, dass ihre Seiten endlichvielmal durch den unendlichfernen Punkt ziehen.

Ein solches Polygon P, dessen n-Ecken im Endlichen liegen, das den Punkt Unendlich p-mal als regulären Punkt im Innern hat, und dessen Seiten q-mal durch den unendlichfernen Punkt ziehen, fassen wir von innen heraus als Kern von Polygonen P_n, $n = 1, 2 \ldots$, auf, deren Seiten ganz im Endlichen liegen und die den Punkt Unendlich $(p + q)$-mal und zwar als regulären Punkt im Innern haben.

Jedes Approximationspolygon P_n ist nun durch die Umkehrfunktion einer Formel II_1, $w_n(z)$ auf einen schlichten Kreis abbildbar. Mit den Überlegungen auf Seite 33—35 folgert man daraus, dass das Polygon P auf den Grenzkreis K einer geeignet ausgewählten Teilfolge K_{nq} eineindeutig konform abbildbar ist, und zwar durch die Umkehrfunktion der Grenzformel $W(z)$ der Formeln $w_{n_q}(z)$. Die Grenzformel $W(z)$ unterscheidet sich von einer Formel II_1 einzig dadurch, dass q von den $\mathfrak{Z}_\pi$, $(\pi = 1, 2 \ldots, p+q,)$ auf die Peripherie

des Grenzkreises K in diejenigen Intervalle gerückt sind, welche den durch Unendlich ziehenden Polygonseiten entsprechen, wie man mit dem Auswahlprinzip ähnlich wie auf Seite 27—28 zeigt.

7. Den Beweis, dass endlichblättrige einfachzusammenhängende n-Ecke, deren Ecken im Endlichen liegen, und die in dem innern Punkte Unendlich p Verzweigungspunkte von den endlichen Ordnungen k_π, $(\pi = 1, 2, \ldots p,)$ besitzen, auf einen schlichten endlichen Kreis eineindeutig konform abbildbar sind, führt man ganz gleich wie bei Polygonen, welche den Punkt Unendlich nur als regulären Punkt — Verzweigungspunkt nullter Ordnung — im Innern haben. Man hat dabei einzig in der Formel II den Faktoren $z - \mathfrak{Z}_\pi$ und $z - \overline{\mathfrak{Z}}_\pi$ des Integranden den Exponenten $-k_\pi - 2$ zu geben, wobei man auch einzelne oder alle der Ordnungen k_π gleich Null wählen kann, im letztern Falle erhält man die oben ausführlich behandelten n-Ecke.

8. Will man mit der Kontinuitätsmethode beweisen, dass n-Ecke, die im unendlichfernen Punkt Ecken haben, auf eine schlichte Kreisscheibe abbildbar sind durch die Umkehrung einer Schlaeflischen Formel, in der dann die den unendlichfernen Eckpunkten entsprechenden $\mu_\varkappa$ negativ auftreten, so muss man diese n-Ecke zuerst durch lineare Funktionen in Kreisbogenpolygone transformieren, deren Ecken ganz im Endlichen liegen. Diese Kreisbogenpolygone sind spezieller Art, denn ihre Seiten resp. ihre Verlängerungen schneiden sich alle in einem Punkte.

Dieser Kontinuitätsbeweis ordnet sich logischerweise in eine Abbildungstheorie der Kreisbogenpolygone ein, die sich allerdings für die obigen speziellen Kreisbogenpolygone ohne weiteres mit den Überlegungen dieser Arbeit durchführen liesse, die uns aber zu weit führen würde. Wir können umsomehr darauf verzichten, da wir bei den Anwendungen im Abschnitt B dieser Arbeit Polygone mit unendlichfernen Ecken nicht brauchen, indem wir uns stillschweigend jeden dort auftretenden Bereich durch eine lineare Funktion so transformiert denken, dass der unendlichferne Punkt sogar nicht einmal auf dem Bereichrande liegt.

Am einfachsten kommt man bei den geradlinigen n-Ecken mit unendlichfernen Ecken, resp. bei den ihnen gleichwertigen, oben charakterisierten Kreisbogenpolygonen mit im Endlichen gelegenen Ecken mit den Resultaten dieser Arbeit wohl so zum Ziele:

Aus den Resultaten des Abschnittes B dieser Arbeit folgert man die Existenz der Abbildung eines solchen Kreisbogenpolygons und damit auch die der Abbildung des ursprünglichen geradlinig begrenzten n-Ecks mit unendlichfernen Ecken auf eine schlichte Kreisscheibe. Denn jedes solche Kreisbogenpolygon kann von innen heraus als Kern von solchen geradlinigen Polygonen aufgefasst werden, wie wir in §§ 1—8 dieses Abschnitts betrachtet haben.

Aus der Existenz der Abbildungsfunktion ergibt sich dann leicht, dass dieselbe die Umkehrung einer Schlaeflischen Formel sein muss, in der die den unendlichfernen Ecken entsprechenden $\mu_\varkappa$ negativ sind.

B. Der allgemeine Abbildungssatz für einfachzusammenhängende Bereiche und das allgemeine Uniformisierungsprinzip.

Wir beweisen hier diese beiden Theoreme rein funktionentheoretisch mit den Überlegungen des I. Kapitels und denen von A) des II. Kapitels.

1. Der allgemeine Abbildungssatz für einfachzusammenhängende Bereiche lautet bekanntlich: Jede nur aus innern Punkten bestehende einfachzusammenhängende Riemannsche Fläche R ist eineindeutig konform abbildbar entweder

1. auf die ganze schlichte Ebene oder
2. auf die schlichte Ebene mit Ausschluss des unendlichfernen Punktes oder endlich
3. auf das Innere einer schlichten endlichen Kreisfläche.

Wir behandeln zuerst den Fall 1, bei dem die abzubildende Fläche R aus Gründen der Analysis situs eine geschlossene endlichblättrige Riemannsche Fläche vom Geschlecht Null sein muss. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die über der w-Ebene ausgebreitete abzubildende Fläche R die Punkte $w=0$ und $w=\infty$ als reguläre Punkte enthält. Wir wählen auf R einen im Endlichen gelegenen regulären Punkt a, so dass man auf der Fläche R um a als Mittelpunkt ein schlichtes Quadrat Q mit einer endlichen Seitenlänge s legen kann, das den Null-

punkt nicht enthält. Wir denken uns nun von der Fläche R das schlichte Innere Q_n eines zu Q homothetischen Quadrates mit der Seitenlänge $\frac{s}{n}$ weg, so haben wir in den Bereichen $R-Q_1$, $R-Q_2\ldots$, $R-Q_n, \ldots$ endlichblättrige Flächen, die mit wachsendem n gegen die abzubildende Fläche R mit Ausschluss des Punktes a konvergieren. Diese Grenzfläche der $R-Q_n$ bezeichnen wir im folgenden mit R^*.

Da jedes der auf R schlicht ausgebreiteten Polygone $(R-Q_n)$ nach A) dieses Kapitels durch die Umkehrfunktion $z=z_n(w)$ einer Formel II so auf einen schlichten Kreis K_n mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt eineindeutig konform abbildbar ist, dass in dem für alle $(R-Q_n)$ festen regulären Punkt $w=0^*$ $z_n(0^*)=0$ und $z_n'(0^*)=1$ ist, so zeigt man Wort für Wort gleich wie auf Seite 33, dass eine unendliche Teilfolge z_{n_q} der Funktionen $z_n(w)$, im ganzen Innern jedes der $(R-Q_n)$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $z(w)$ konvergiert, für die $z(0^*)=0$ und $z'(0^*)=1$ ist. Die nicht konstante Grenzfunktion $z=z(w)$ bildet die Fläche R^* nach Seite 34—35 eineindeutig konform auf den Kern K der konzentrischen Kreise K_{n_q} mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ab, der entweder ein schlichter endlicher Kreis oder die ganze Ebene mit Ausschluss des unendlichfernen Punktes ist. Die Fläche R^* kann nun aber nicht auf einen endlichen Kreis eineindeutig konform abgebildet sein, denn sonst wäre die Funktion $z=z(w)$ in der Umgebung des Punktes a auf Grund ihrer Abbildungseigenschaften regulär und beschränkt, also müsste sie nach einem schon öfters angewandten Riemannschen Satz[41]) auch noch im Punkte $w=a$ regulär sein. Darum würde $z=z(w)$ die geschlossene Fläche R auf das vollständige Innere des endlichen Kreises K plus einen Peripheriepunkt eineindeutig konform abbilden, was schon aus Gründen der Analysis situs unmöglich ist. Die Fläche R^* wird also durch $z=z(w)$ eineindeutig konform auf die schlichte Ebene mit Ausschluss des unendlichfernen Punktes abgebildet. Der gleiche Riemannsche Satz zeigt nun weiter, dass $z=z(w)$ in dem Grenzpunkt a von R^* nur eine Unendlichkeitsstelle und zwar von der ersten Ordnung hat, also bildet die Funktion $z=z(w)$

---

[41]) Siehe z. B. W. F. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie I. 2. Aufl. S. 310.

die endlichblättrige geschlossene Riemannsche Fläche R vom Geschlecht Null eineindeutig konform auf die ganze schlichte z-Ebene ab, w. z. b. w.

Zum Beweise des Abbildungssatzes für die offenen einfachzusammenhängenden Riemannschen Flächen, für die entweder der Fall 2 oder 3 eintreten muss, denken wir uns wieder die allgemeine offene einfachzusammenhängende Riemannsche Fläche R von innen heraus durch unendlich viele, auf R schlicht ausgebreitete, endlichblättrige, endlichseitige Polygone Π_1, Π_2, ... Π_n, ... approximiert, so dass die Riemannsche Fläche R der Kern der Polygonfolge Π_1, Π_2, ... Π_n, ... ist. Da nun jedes der Polygone Π_n nach A) dieses Kapitels durch die Umkehrfunktion $z = z_n(w)$ einer Formel II, die einen für alle Π_n festen regulären innern Punkt, z. B. $w = 0^*$ festlässt und dort die Ableitung Eins hat, auf das schlichte Innere eines endlichen Kreises K_n mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt eineindeutig konform abbildbar ist, so folgt nach den Schlüssen auf Seite 33—35, dass eine unendliche Teilfolge $z_{n_q}(w)$ im ganzen Innern jedes der Π_n gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $z = z(w)$ konvergiert, für die $z(0^*) \neq 0$ und $z'(0^*) = 1$ ist, und die das vollständige Innere der Riemannschen Fläche R eineindeutig konform auf den Kern K der schlichten konzentrischen Kreise K_{n_q} abbildet. Der Kern K ist nun notwendig ein schlichter Kreis um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit endlichem oder unendlichgrossem Radius, wodurch das oben formulierte allgemeine Abbildungstheorem für einfachzusammenhängende Bereiche in allen Teilen bewiesen ist.

2. Gehen wir noch mit einigen Worten auf den Beweis des allgemeinen Uniformisierungsprinzipes ein, das bekanntlich mit dem folgenden Abbildungssatze identisch ist: Das Innere jeder beliebig vielfachzusammenhängenden schlichtartigen Riemannschen Fläche R ist eineindeutig konform in einen schlichten Bereich abbildbar.

Dabei heisst eine Riemannsche Fläche nach Koebe schlichtartig, wenn sie durch jeden auf ihr verlaufenden Rückkehrschnitt in getrennte Teile zerfällt.

Zum Beweise fasst man die allgemeinste schlichtartige über der w-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche R als Kern von endlichvielfachzusammenhängenden endlichblättrigen schlichtartigen Bereichen B_1, B_2, ..., B_n, ... auf, von denen jeder innerhalb R schlicht

ausgebreitet ist, nur endlichviele Windungspunkte und zwar endlicher Ordnung hat und z. B. nur von geradlinigen endlichseitigen Polygonen begrenzt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass R, wie auch B_n einen festen Punkt $w = 0^*$, als innern regulären Punkt enthalten.

Jeden der Approximationsbereiche B_n von R ergänzen wir mit Koebe[42]) zu einem unter A) dieses Kapitels betrachteten einfachzusammenhängenden Polygon Π_n, das wir durch die Umkehrfunktion $z = z_n\,(w)$ einer Formel II so eineindeutig konform auf einen schlichten Kreis K_n abbilden, dass $z_n\,(0^*) = 0$ und $z'_n\,(0^*) = 1$ ist. Da B_n ein Teilbereich von Π_n ist, so bildet also die Funktion $z_n\,(w)$ B_n auf einen schlichten Bereich, einen Teilbereich von K_n, so eineindeutig konform ab, dass sie den auf R festen markierten Punkt $w = 0^*$ festlässt und dort die Ableitung Eins hat. Daraus schliessen wir Wort für Wort gleich wie auf Seite 33, dass eine unendliche Teilfolge der Funktionen $z_n\,(w)$, $z_{n_q}\,(w)$ innerhalb der Riemannschen Fläche $R = \lim\limits_{q=\infty} B_{n_q}$ gegen eine Grenzfunktion $z = z\,(w)$ konvergiert, die nicht konstant ist, da für sie auch $z\,(0^*) = 0$ und $z'\,(0^*) = 1$ gilt. Weiter folgt einzig unter Benützung des Hurwitzschen Theorems, weil die Näherungsbereiche B_{n_q} von R durch die Funktionen $z_{n_q}\,(w)$ auf schlichte Bereiche eineindeutig konform abgebildet werden, dass die Riemannsche Fläche $R = \lim\limits_{q=\infty} B_{n_q}$ durch die Grenzfunktion $z = z\,(w) = \lim\limits_{q=\infty} z_{n_q}\,(w)$ auch auf einen schlichten Bereich der z-Ebene eineindeutig konform abgebildet wird, w. z. b. w.

C. Das Kreisnormierungstheorem für endlichvielfachzusammenhängende schlichtartige Bereiche.

1. Wir beweisen im folgenden mit der Kontinuitätsmethode auf zwei verschiedene Arten das Kreisnormierungstheorem für endlichvielfachzusammenhängende schlichtartige Bereiche. Dasselbe lautet bekanntlich: Jeder $(p+1)$-fachzusammenhängende schlichtartige Bereich B lässt sich stets

---

[42]) P. Koebe: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Göttinger Nachrichten. 11. Juli 1908.

in einen von $p+1$ Vollkreisen begrenzten schlichten Bereich eineindeutig konform abbilden; dabei rechnen wir auch blosse Punkte zu den Vollkreisen.

2. Bei dem ersten Beweis setzen wir vorerst wegen der einheitlichen Beweisführung $p > 1$ voraus; wir werden dann am Schlusse dieses Beweises die nötigen Bemerkungen für den Beweis der ausgeschlossenen Fälle $p = 0$ und $p = 1$ geben.

Da die durch das Kreisnormierungstheorem geforderte Abbildungsfunktion $w(z)$ nach Koebe[43]) nur bis auf eine lineare Substitution vollständig bestimmt ist, so machen wir sie bei diesem 1. Beweis dadurch zu einer vollständig eindeutig bestimmten Funktion, indem wir sie so normieren, dass sie in einem innern regulären Punkt a des abzubildenden Bereiches B die Entwicklung: $\frac{1}{z-a} + ((0))_a$[44]) hat.

Bei diesem ersten Beweise benützen wir das Hilbertsche Parallelschlitztheorem[45]) als wesentliches Hilfsmittel, denn da man nach demselben jeden $(p+1)$-fachzusammenhängenden schlichtartigen Bereich B auf eine und nur eine Weise in einen von $p+1$ im Endlichen gelegenen, zur Achse des Reellen parallelen Schlitzen begrenzten schlichten Bereich eineindeutig konform abbilden kann durch eine Funktion $z(x)$, die in der Umgebung eines innern regulären Punktes a von B die Entwicklung hat: $\frac{1}{x-a} + ((0))_a$, so müssen wir, wenn wir das Parallelschlitztheorem zum Beweise des oben formulierten Kreisnormierungstheoremes benützen, nur noch zeigen, dass jeder schlichte Bereich, der den Punkt Unendlich enthält, und der von $p+1$ endlichen zur Achse des Reellen parallelen Schlitzen begrenzt wird, kurz dass jeder schlichte $(p+1)$-fachzusammenhängende Parallelschlitzbereich, der den Punkt Unendlich enthält, auf eine und nur eine Weise in einen schlichten $(p+1)$-fachzusammenhängenden Kreisbereich eineindeutig konform abbildbar ist durch eine Funktion $w(z)$, die sich im Unendlichen verhält wie: $z + ((0))_\infty$.

---

[43]) P. Koebe: Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven, III. Mathematische Annalen. Bd. 72.

[44]) Unter ((o))a versteht man eine im Punkte a verschwindende, reguläre analytische Funktion.

[45]) Auf Seite 10 unter [21]) zitiert.

Das Kreisnormierungstheorem, indem die abzubildenden Bereiche schlichte Parallelschlitzbereiche sind, beweisen wir nun in zwei Schritten: zuerst zeigen wir mit der Kontinuitätsmethode, dass jeder schlichte $(p-1)$-fachzusammenhängende Parallelschlitzbereich, bei dem jeder Schlitz eine von Null verschiedene Länge hat, auf einen und nur einen von wirklichen Vollkreisen begrenzten schlichten Bereich abbildbar ist. Für einen andern schlichten $(p+1)$-fachzusammenhängenden Parallelschlitzbereich, von dessen Schlitzen mindestens einer punktförmig ist, folgt dann das Kreisnormierungstheorem aus dem ersten Resultat am einfachsten mit dem Satze VI des I. Kapitels, wie wir unten zeigen.

3. Wir beweisen also zuerst mit der Kontinuitätsmethode den Satz: Jeder $(p+1)$-fachzusammenhängende schlichte Parallelschlitzbereich, der den Punkt Unendlich enthält, und in dem jeder Begrenzungsschlitz ohne Ausnahme eine endliche von Null verschiedene Länge hat, ist auf eine und nur eine Weise in einen schlichten $(p+1)$-fachzusammenhängenden Kreisbereich eineindeutig konform abbildbar, bei dem jeder der Begrenzungskreise ohne Ausnahme einen von Null verschiedenen endlichen Radius hat, wobei die Abbildungsfunktion $w(z)$ im Unendlichen die Entwicklung: $z+((0))_\infty$ hat.

Zum Beweise betrachten wir auf der einen Seite die Menge C_1 aller schlichten $(p+1)$-fachzusammenhängenden Parallelschlitzbereiche, die den Punkt Unendlich im Innern haben, und bei denen jeder Begrenzungsschlitz ohne Ausnahme eine endliche von Null verschiedene Länge hat. Diese Menge C_1 bildet ein $3(p+1)$-dimensionales Gebiet, denn je zwei beliebige ihr angehörende Bereiche sind innerhalb C_1 stetig ineinander überführbar, und zudem besitzt C_1 zu jedem ihr angehörenden Bereich ohne Ausnahme eine durch $3(p+1)$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbare volle Umgebung; diese Parameter sind die $p+1$ komplexen Anfangspunkte und die $p+1$ Längen der Begrenzungsschlitze.

Auf der andern Seite betrachten wir die Menge C_2 aller schlichten $(p+1)$-fachzusammenhängenden Kreisbereiche, die den Punkt Unendlich im Innern enthalten, und bei denen jeder der Begrenzungskreise einen endlichen von Null verschiedenen Radius hat. Diese Menge C_2 bildet auch ein $3(p+1)$-dimensionales Gebiet. Die

$3(p+1)$ reellen Parameter sind hier die $p+1$ komplexen Mittelpunkte und die $p+1$ reellen Radien der $p+1$ Begrenzungskreise.

Jeder Kreisbereich aus C_2 ist nun nach dem Parallelschlitztheorem auf einen und nur einen schlichten $(p+1)$-fachzusammenhängenden Parallelschlitzbereich eineindeutig konform abbildbar, dessen Schlitze lauter endliche von Null verschiedene Länge haben, wie Courant[46]) direkt aus der Minimaleigenschaft des Dirichletschen Integrals folgerte. Jedem Kreisbereich aus C_2 entspricht also ein und nur ein Schlitzbereich aus C_1.

Weiter kann einem Schlitzbereich aus C_1 nach dem Koebeschen Unitätssatze[47]) höchstens ein Kreisbereich aus C_2 entsprechen.

Die eineindeutige Beziehung zwischen C_1 und C_2 ist ausserdem noch stetig, denn jede stetige Änderung eines Kreisbereiches aus C_2 in C_2 ausgeführt, hat eine stetige Änderung seines Bildschlitzbereiches aus C_1 zur Folge, oder das heisst ausführlich folgendes: Sei K ein beliebiger C_2 angehöriger Kreisbereich, dessen Begrenzungskreise also ganz im Endlichen, z. B. innerhalb eines Quadrates Q liegen, und sei $K_1, K_2, \ldots K_n, \ldots$ eine unendliche Kreisbereichfolge aus C_2, deren Begrenzungskreise auch in Q liegen, und die gegen K als Kern konvergiert. Bezeichnen wir mit P, resp. P_n den zu K, resp. zu K_n gehörigen Parallelschlitzbereich aus C_1, so folgt mit einem Verzerrungssatze von Koebe, dass die Begrenzungsschlitze der P_n auch in einem endlichen, von n unabhängigen Bereiche liegen, d. h., dass die Parameter der P_n gleichmässig beschränkt sind. Wir behaupten nun weiter, dass die P_n gegen P konvergieren. Dieser Stetigkeitssatz ist eine Folgerung aus dem Satze V des I. Kapitels. Denn sei $z_n(w)$ diejenige analytische Funktion, die K_n auf P_n abbildet, so ist die Folge $z = z_n(w)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nach Caratheodory-Landau kompakt, weil jede Funktion $z = z_n(w)$ mindestens drei voneinander verschiedene Punkte der z-Ebene auslässt. Somit konvergiert eine unendliche Teilfolge $z_{n_q}(w)$, $(q = 1, 2, \ldots)$ in K gegen eine Grenzfunktion $z(w)$, die, wie die $z_n(w)$, im Unendlichen die Entwicklung $w + ((0))_\infty$ hat, und die nach Satz V des I. Kapitels K auf den Kern

---

[46]) B. Courant: Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie. Kap. IV. Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 144, oder einfacher nach dem Schlusse auf Seite 46—47 dieser Arbeit.

[47]) Auf Seite 10 unter [19]) zitiert.

P^* der P_{n_q} abbildet, und die P_{n_q} konvergieren gegen ihren Kern P^*. Dieser Kern P^* ist notwendig ein Parallelschlitzbereich, denn die P_{n_q} hängen eineindeutig und stetig von ihren gleichmässig beschränkten Parametern ab, also konvergiert eine unendliche Teilfolge der P_{n_q} gegen einen Parallelschlitzbereich, der mit dem Kern P^* der P_{n_q} identisch ist, da die P_{n_q} gegen ihren Kern P^* konvergieren. Da nun K wegen dem Parallelschlitztheorem nur auf einen Parallelschlitzbereich abbildbar ist, so muss der Kern P^* der P_{n_q} mit P identisch sein und dieses Resultat ist von jeder Auswahl unabhängig; also müssen die P_n gegen P als Kern konvergieren.

Bis jetzt wissen wir, dass die Menge derjenigen Parallelschlitzbereiche aus C_1, die das Bild aller Kreisbereiche aus C_2 sind, oder also, dass die Menge C_3 aller Parallelschlitzbereiche aus C_1, die auf einen Kreisbereich aus C_2 abbildbar sind, das eineindeutige und stetige Bild des $3(p+1)$-dimensionalen Gebietes C_2 in C_1 ist. Diese Teilmenge C_3 von C_1 muss nun weiter nach dem Brouwerschen Satze von der Invarianz des Gebietes wieder ein $3(p+1)$-dimensionales Gebiet sein. C_3 besteht also nur aus innern Punkten, und enthält seine Grenzen nicht. Die Wichtigkeit des Gebietscharakters von C_3 ergibt sich gleich beim letzten Schlusse des Kontinuitätsbeweises, der darin besteht, zu zeigen, dass das Gebiet C_3 mit C_1 identisch ist, was unser zu beweisende Satz behauptet. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, das Gebiet C_3 fülle C_1 nicht vollständig aus, dann hat das Gebiet C_3 innerhalb C_1 notwendig Grenzen, die wegen der Gebietseigenschaft von C_3 nicht zu C_3 gehören können. Die Grenzen von C_3 in C_1 bestehen nun aus Parallelschlitzbereichen von C_1, denen also keine Kreisbereiche aus C_2 entsprechen. Wir beweisen nun aber den Satz, den wir nach Koebe kurz Limessatz nennen, dass jeder Parallelschlitzbereich aus C_1, der auf der Grenze von C_3 in C_1 liegt, auf einen Kreisbereich aus C_2 abbildbar ist, oder also dem Gebiete C_3 angehört. Da wir in diesen Widerspruch durch die Annahme, C_3 fülle C_1 nicht vollständig aus, verwickelt worden sind, so muss C_3 notwendig mit C_1 identisch sein, w. z. b. w.

Wir müssen jetzt noch den Beweis des Limessatzes nachholen. Sei also P irgendein Parallelschlitzbereich von C_1, der auf der Grenze des Gebietes C_3 innerhalb C_1 liegt, der also den Punkt Unendlich im Innern hat und dessen Schlitze ganz im Endlichen, z. B. innerhalb eines festen Quadrates Q liegen, so betrachten wir eine unendliche

Folge von Parallelschlitzbereichen $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ aus C_3, die gegen P als Kern konvergiert, und deren Schlitze innerhalb des festen Quadrates Q liegen. Jeder dieser Parallelschlitzbereiche P_n ist also auf einen Kreisbereich K_n von C_2 eineindeutig konform abbildbar. Da nun die Begrenzungen der P_n innerhalb des festen Quadrates Q liegen, so folgt mit dem Verzerrungssatze,[48]) dass die Begrenzungskreise der K_n auch innerhalb eines endlichen, von n unabhängigen, festen Bereiches liegen. Die $3(p+1)$ reellen Parameter, von denen die K_n eineindeutig und stetig abhängen, sind also gleichmässig beschränkt. Wir können darum immer eine unendliche Teilfolge der schlichten Kreisbereiche K_n auswählen, die gegen einen schlichten Grenzkreisbereich K, der den Punkt Unendlich enthält, als Kern konvergiert. Von den Parallelschlitzbereichen P_n denken wir uns im folgenden nur noch diejenigen beibehalten, die zu den oben ausgewählten Kreisbereichen K_n gehören. Diese ausgewählten P_n konvergieren natürlich erst recht gegen P als Kern. Da nun weiter die Schlitzbereiche P_n wie die Kreisbereiche K_n für beliebig hohes n mindestens je drei voneinander verschiedene Punkte ihrer Ebenen auslassen, so folgt nach Satz VI des I. Kapitels, dass der Parallelschlitzbereich P auf den Kreisbereich K eineindeutig konform bezogen ist, also muss K notwendig $(p+1)$-fachzusammenhängend sein. Der Grenzkreisbereich K ist nun einer unserer Kreisbereiche aus C_2, denn er könnte doch höchstens dadurch ausarten, dass einige seiner $(p+1)$ getrennten Begrenzungskreise sich auf Punkte reduzierten. Dies ist aber unmöglich, denn würde einem der Schlitze $s_\varkappa$ von P, die doch sämtlich endliche Länge haben, ein zu einem Punkte zusammengeschrumpfter Kreis $k_\varkappa$ von K entsprechen, so wäre die Funktion $z = z(w)$, die den Kreisbereich K auf den Schlitzbereich P eineindeutig konform abbildet, und für die doch im Unendlichen die Entwicklung $w + ((0))_\infty$ gilt, in der Umgebung des Punktes $w = k_\varkappa$ mit Ausnahme dieses Punktes selbst also analytisch und zudem noch beschränkt, was ohne weiteres mit dem Verzerrungssatze[48]) folgt. Dann wäre aber nach einem Riemannschen Satze[49]) die nicht konstante Funktion $z = z(w)$ auch noch im Punkte $w = k_\varkappa$ regulär, was offenbar wegen unserer Annahme,

---

[48]) Auf Seite 33 unter [36]) zitiert.

[49]) Auf Seite 39 unter [41]) angegeben.

dem Punkte $w = k_\varkappa$ entspreche durch $z = z\,(w)$ der endliche Schlitz $s_\varkappa$, widersinnig ist, also kann kein Begrenzungskreis k_n von K zu einem Punkte zusammenschrumpfen. Dadurch ist in allen Teilen bewiesen, dass jeder Parallelschlitzbereich, der auf der Grenze von C_3 in C_1 liegt, das Bild eines Kreisbereiches aus C_2 ist und damit auch, dass jeder Parallelschlitzbereich aus C_1 auf einen und zwar nur einen Kreisbereich aus C_2 eineindeutig konform abbildbar ist, was die Aussage unseres zu beweisenden Satzes ist.

Auf Grund des soeben bewiesenen Resultates und dem Satze VI des I. Kapitels werden wir in wenigen Strichen den Beweis erbracht haben, dass überhaupt jeder $(p+1)$-fachzusammenhängende schlichte Parallelschlitzbereich, der den Punkt Unendlich enthält, und bei dem jeder einzelne Schlitz zu einem Punkte ausgeartet sein kann, auf einen und darum nach Koebe auf nur einen schlichten Kreisbereich eineindeutig konform abbildbar ist durch eine Funktion $w\,(z)$, die im Unendlichen die Entwicklung $z + ((0))_\infty$ hat.

Denn sei P ein beliebiger $(p+1)$-fachzusammenhängender schlichter Parallelschlitzbereich, der den unendlichfernen Punkt enthält, und von dessen Schlitzen mindestens einer punktförmig ist, so fassen wir P als Kern von unendlichvielen Parallelschlitzbereichen $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ auf, deren Schlitze sämtlich endliche Längen haben und in einem von n unabhängigen festen endlichen Bereiche liegen.

Jeder Parallelschlitzbereich P_n ist nun nach dem oben bewiesenen Satze durch eine Funktion $w_n\,(z)$, die sich im Unendlichen wie $z + ((0))_\infty$ verhält, in einen schlichten Kreisbereich K_n eineindeutig konform abbildbar, dessen $p+1$ Begrenzungskreise nach einem Verzerrungssatze von Koebe[50]) innerhalb eines von n unabhängigen endlichen Bereiches liegen. Da ferner die Kreisbereiche K_n eineindeutig und stetig von ihren endlichvielen Bestimmungsstücken, nämlich den Zentren und Radien ihrer Begrenzungskreise, abhängen, die also gleichmässig beschränkt sind, so kann man aus der Bereichfolge K_n eine unendliche Teilfolge K_{n_q} aussondern, die gegen einen schlichten Kreisbereich K als Kern konvergiert, der das Unendlichferne im Innern hat. Nach dem Satze VI des I. Kapitels ist dann

[50]) l. c

der schlichte Parallelschlitzbereich P durch die existierende Grenzfunktion $\lim_{n_q = \infty} w_{n_q}(z)$ auf den schlichten Kreisbereich K eineindeutig konform abgebildet, der darum notwendig auch $(p+1)$-fachzusammenhängend sein muss.

Damit haben wir das Kreisnormierungstheorem für endlichvielfachzusammenhängende schlichte Parallelschlitzbereiche und dann auf Grund des Hilbertschen Parallelschlitztheorems für jeden beliebig begrenzten endlichvielfachzusammenhängenden schlichtartigen Bereich bewiesen.

4. An diesen ersten Beweis wollen wir noch zwei Bemerkungen knüpfen.

Wir haben beim Beweis die einfach- und zweifach-zusammenhängenden Bereiche darum ausgeschlossen, um den Stetigkeitssatz und den Limessatz mit dem Satze VI des I. Kapitels beweisen zu können. Bei diesen ausgeschlossenen Fällen, $p = 0$ und $p = 1$, kommt man aber auch Wort für Wort mit dem gleichen Kontinuitätsbeweis durch, wenn man beim Beweis des Stetigkeitssatzes und des Limessatzes anstatt Satz VI des I. Kapitels die allgemeinern Überlegungen auf Seite 33—35 benützt.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf einen Kontinuitätsbeweis des allgemeinen Koebeschen Geradenschlitztheorems,[51]) das bekanntlich aussagt, dass man jeden $(p+1)$-fachzusammenhängenden schlichtartigen Bereich B in einen schlichten Bereich eineindeutig konform abbilden kann, dessen Begrenzung von $p+1$ geradlinigen Schlitzen mit beliebig vorgeschriebener Richtung gebildet wird.

Normiert man die durch dieses Theorem geforderte Abbildungsfunktion $w(z)$ so, dass sie in einem innern regulären Punkt a von B die Entwicklung $\frac{1}{z-a} + ((0))\infty$ hat, so ist sie dadurch vollständig eindeutig bestimmt. Da dieser von Koebe[51]) bewiesene Unitätssatz gilt, so kann man den obigen Beweis des Kreisnormierungstheorems Wort für Wort zu einem Beweis des allgemeinen Koebeschen Geradenschlitztheorems umschreiben, indem man einzig an Stelle der schlichten Kreisbereiche die Koebeschen allgemeinen Geradenschlitzbereiche setzt, deren Schlitze vorgeschriebene Richtung haben.

---

[51]) In der Einleitung unter [22]) zitiert.

5. Die erste Anregung zum zweiten Beweis des Kreisnormierungstheorems verdanke ich Herrn Professor Dr. L. Bieberbach. Dieser Beweis wird auch in zwei Schritten geführt.

Im ersten wesentlichen Teil des Beweises zeigt man mit der Kontinuitätsmethode ähnlich wie unter A) dieser Arbeit, dass jeder schlichtartige endlichblättrige Bereich mit nur endlichvielen Windungspunkten endlicher Ordnung, dessen $p + 1$ Begrenzungslinien endlichseitige geradlinige Polygone sind, in einem schlichten Kreisbereich eineindeutig konform abbildbar ist. Dieser Kontinuitätsbeweis, der also eine logische Verallgemeinerung des Beweises A) für einfachzusammenhängende Polygone auf mehrfach zusammenhängende Vielecke ist, benützt das Hilbertsche Parallelschlitztheorem nicht, wohl aber entweder wie wir hier die Existenz oder dann die explizite Darstellung gewisser automorpher Funktionen vom Schottky-Typus.

Im zweiten Teil des Beweises fasst man einen beliebig begrenzten $(p + 1)$-fachzusammenhängenden schlichtartigen Bereich B, der unendlichblättrig sein kann, als Kern von unendlichvielen endlichblättrigen schlichtartigen $(p + 1)$-fachzusammenhängenden Polygonen auf, deren jedes nach dem ersten Teil des Beweises in einen schlichten Kreisbereich eineindeutig konform abbildbar ist. Daraus folgt dann weiter mit den Sätzen des I. Kapitels, dass auch der Kern B auf einen schlichten Kreisbereich eineindeutig konform abbildbar ist.

Bei diesem zweiten Beweis machen wir nun zweckmässig die durch das Kreisnormierungstheorem geforderte Abbildungsfunktion dadurch zu einer vollständig eindeutig bestimmten Funktion, indem wir von ihr verlangen, dass sie in einem innern regulären Punkte des abzubildenden Bereiches B Null wird und dort die Ableitung Eins hat, und dass der von ihr gelieferte Bildkreisbereich, der also den Nullpunkt enthält, einen Begrenzungskreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt besitzt.

Wir führen diesen soeben charakterisierten Beweis nur für verzweigungsfreie schlichtartige Bereiche durch, die das Unendlichferne nicht im Innern haben, da die in diesem Falle auftretenden Überlegungen in Verbindung mit denen von A) dieses Kapitels auch für die allgemeinsten schlichtartigen Bereiche hinreichen. Unsere Beschränkung, die also die schlichten Bereiche als Spezialfall enthält, ist darum unwesentlich, weil man gewöhnlich die Normierungstheo-

reme nur für schlichte Bereiche beweist, da man die schlichtartigen Bereiche auf Grund des in B) dieses Kapitels bewiesenen allgemeinen Uniformisierungstheorems auf schlichte Bereiche konform abbilden kann.

Beim Nachweis der Abbildbarkeit von verzweigungsfreien schlichtartigen Bereichen, die den Punkt Unendlich nicht im Innern enthalten, in schlichte Kreisbereiche, beweisen wir vor allen Dingen mit der Kontinuitätsmethode den Satz: Jeder verzweigungspunktfreie $(p+1)$-fachzusammenhängende schlichtartige Bereich, der den Nullpunkt, nicht aber den unendlichfernen Punkt im Innern enthält, und der von geradlinigen endlichseitigen Polygonen begrenzt wird, ist auf eine und nur eine Weise in einen schlichten Kreisbereich, dessen einer Begrenzungskreis den Nullpunkt als Mittelpunkt hat, so eineindeutig konform abbildbar, dass die Abbildungsfunktion den Nullpunkt des Polygons festlässt und dort die Ableitung Eins hat.

6. Beweis: Der Kontinuitätsmethode gemäss lösen wir zuerst die wesentlich einfachere umgekehrte Aufgabe, die darin besteht, einen schlichten $(p+1)$-fachzusammenhängenden Kreisbereich, der den Nullpunkt enthält, und der einen Begrenzungskreis um den Nullpunkt als Mittelpunkt hat, so auf verzweigungspunktfreie Polygone, die das Unendlichferne nicht im Innern haben, eineindeutig konform abzubilden,[52]) dass dabei der Nullpunkt festbleibt und der Abbildungsmodul dort Eins ist.

Zu diesem Zwecke sei nun K_{p+1} ein vorgelegter $(p+1)$-fachzusammenhängender schlichter Kreisbereich einer z-Ebene, der den Nullpunkt enthält, und der ausser von einem Kreis $\mathfrak{k}_1$ mit dem endlichen Radius r_1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt noch von p im Innern des Kreises $\mathfrak{k}_1$ gelegenen, sonst willkürlichen Kreisen $\mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \ldots \mathfrak{k}_{p+1}$ mit den endlichen Radien $r_2, r_3, \ldots r_{p+1}$ und den Mittelpunkten $c_2 = a_2 + ib_2$, $c_3 = a_3 + ib_3, \ldots, c_{p+1} = a_{p+1} + ib_{p+1}$ begrenzt wird, so markieren wir auf jedem der $p+1$ Begrenzungskreise von K_{p+1} endlichviele voneinander verschiedene Punkte:
so auf dem Kreise $\mathfrak{k}_1$ die n_1 Punkte $z_{1,1} = r_1 e^{i\varphi_{1,1}}$ $z_{1,2} = r_1 e^{i\varphi_{1,2}}$
$z_{1,3} = r_1 e^{i\varphi_{1,3}}, \ldots z_{1,n_1} = r_1 e^{i\varphi_{1,n_1}}$

---

[52]) Diese Bildpolygone sind natürlich schlichtartig.

dann auf dem Kreise $\mathfrak{k}_2$ die n_2 Punkte $z_{2,1} = c_2 + r_2 e^{i\varphi_{2,1}}$,

$$z_{2,2} = c_2 + r_2 e^{i\varphi_{2,2}}, \ldots, z_{2,n_2} = c_2 + r_2 e^{i\varphi_{2,n_2}}$$

u. s. f.

zuletzt auf dem Kreise $\mathfrak{k}_{p+1}$ die n_{p+1} Punkte $z_{p+1,1} = c_{p+1} + r_{p+1} e^{i\varphi_{p+1,1}} \ldots z_{p+1,n_p+1} = c_{p+1} + r_{p+1} e^{i\varphi_{p+1,n_p+1}}$

wobei die Anzahl der markierten Punkte auf jedem der Kreise grösser als zwei sei.

Jedem dieser $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p + 1 = N$ Punkte ordnen wir eine von Null und Unendlich verschiedene reelle Zahl zu, so dem Punkte $z_{k,l}$ die Zahl $\mu_{k,l}$. Diese N reellen Zahlen müssen erstens so gewählt werden, dass sie die folgenden $p + 1$ linearen Gleichungen befriedigen:

$$\begin{aligned}
&\mu_{1,1} + \mu_{1,2} + \mu_{1,3} + \ldots + \mu_{1,n_1} = n_1 - 2 \\
1.\quad &\mu_{2,1} + \mu_{2,2} + \mu_{2,3} + \ldots + \mu_{2,n_2} = n_2 - 2 \\
&\mu_{3,1} + \mu_{3,2} + \mu_{3,3} + \ldots + \mu_{3,n_3} = n_3 - 2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mu_{p+1,1} + \mu_{p+1,2} + \mu_{p+1,3} + \ldots + \mu_{p+1,n_p+1} = n_{p+1} - 2
\end{aligned}$$

Zweitens müssen die $\mu_{k,l}$ noch $2p$ linearen homogenen Gleichungen mit reellen Koeffizienten genügen, die wir gleich nachher angeben.

Von unserm Kreisbereich K_{p+1} gehen wir nun zu einem symmetrischen Schottky-Fundamentalbereich über, indem wir zu K_{p+1} sein Spiegelbild in bezug auf einen seiner Begrenzungskreise, z. B. in bezug auf den Kreis $\mathfrak{k}_1$ hinzunehmen, und indem wir dem so entstandenen $2p$-fachzusammenhängenden Kreisbereich K_{2p}, der ausser von $\mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \ldots \mathfrak{k}_{p+1}$ noch von deren Spiegelbildern $\mathfrak{k}_2', \mathfrak{k}_3' \ldots \mathfrak{k}_{p+1}'$ in bezug auf $\mathfrak{k}_1$ begrenzt wird, diejenige diskontinuierliche unendliche Gruppe G linearer Substitutionen zuordnen, deren erzeugende Substitutionen die $p + 1$ Spiegelungen an den $p + 1$ Begrenzungskreisen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_{p+1}$ von K_{p+1} sind.

Durch diese Erweiterung von K_{p+1} zu einem symmetrischen Schottky-Fundamentalbereich K_{2p} gelingt es, diejenige Funktion $w(z)$ aufzustellen, für die $w(0) = 0$ und $w'(0) = 1$ ist, und die unseren vorgegebenen schlichten Kreisbereich K_{p+1} in der z-Ebene auf ein den unendlichfernen Punkt nicht im Innern enthaltendes verzweigungspunktfreies $(p+1)$-fachzusammenhängendes Polygon der w-Ebene eineindeutig konform abbildet, wobei dem Kreise $\mathfrak{k}_k$, $(k = 1, 2$

$\ldots p + 1)$ ein geradlinig begrenztes n_k-Eck mit den Innenwinkeln $\mu_{k,1}\pi$, $\mu_{k,2}\pi$, $\ldots$ $\mu_{k,n_k}\pi$ entspricht.

Diese Abbildungsfunktion $w(z)$ ist nämlich Lösung der folgenden Schwarzschen Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dz} log \frac{dw}{dz} = L(z),$$

wo $L(z)$ eine zu dem symmetrischen Schottky-Bereich K_{2p} gehörige eindeutige automorphe Funktion ist, die auf dem Rande von K_{p+1} nur reelle Werte annimmt, die in den Stigmas $z_{k,l}$, $(k = 1, 2 \ldots p + 1$ und $l = 1, 2, \ldots n_k)$ von der ersten Ordnung mit dem Residuum $\mu_{k,l} - 1$ unendlich wird, und die sonst in K_{p+1} holomorph ist. Dies ergibt sich ohne weiteres, da die Funktion $w(z)$ auf Grund ihrer Abbildungseigenschaften über K_{p+1} hinaus mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes analytisch fortsetzbar ist. Wir gewinnen also die Abbildungsfunktion $w(z)$ durch Integration der Schwarzschen Differentialgleichung aus der wesentlich einfachern, längst bekannten reellen automorphen Funktion $L(z)$, deren Existenz oder deren explizite Darstellung wir somit bei diesem Beweise brauchen. Wir benützen hier die mit der potentialtheoretischen Schwarz-Neumannschen Methode sichergestellte Existenz von $L(z)$, bei der man bekanntermaßen[53]) $L(z)$ aus $n_1 + n_2 + \ldots + n_{p+1} = N$ reellen zur Gruppe G gehörigen automorphen Elementarintegralen zweiter Gattung $Z^{k,l}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots p + 1$ und $l = 1, 2, \ldots n_k;)$ aufbaut, wo das reelle automorphe Elementarintegral zweiter Gattung $Z_{k,l}(z)$, auf dem Rande von K_{p+1} nur reelle Werte annimmt und in ganz K_{p+1} ausgenommen in dem Punkte $z_{k,l}$ holomorph ist, indem $Z_{k,l}(z)$ unendlich wird wie $\frac{1}{z - z_{k,l}}$, und wo sich $Z_{k,l}(z)$ bei den Substitutionen der Gruppe G nur um Constante (sog. Perioden) additiv ändert. $L(z)$ ergibt sich nämlich aus diesen N nach den Schwarz-Neumannschen Sätzen existierenden Integralen $Z_{k,l}(z)$ durch folgenden Ausdruck:

2. $C + (\mu_{1,1} - 1) Z_{1,1}(z) + (\mu_{1,2} - 1) Z_{1,2}(z) + \ldots + (\mu_{1,n_1} - 1) Z_{1,n_1}(z) + (\mu_{2,1} - 1) Z_{2,1}(z) + \ldots + (\mu_{2,n_2} - 1) Z_{2,n_2}(z) + (\mu_{3,1} - 1) Z_{3,1}(z) + \ldots + (\mu_{p+1,1} - 1) Z_{p+1,1}(z) + \ldots + (\mu_{p+1,n_{p+1}} - 1) Z_{p+1,n_{p+1}}(z),$

[53]) Auf Seite 10 unter [16]) zitiert.

wenn die von $+1$ verschiedenen reellen endlichen Zahlen $\mu_{k,l}$, $(k = 1, 2, \ldots p+1, l = 1, 2, \ldots n_k)$ — die Residuen —, die schon die $p+1$ linearen Gleichungen 1. befriedigen, noch den folgenden $2p$ linearen homogenen Gleichungen:

$$3. \quad (\mu_{1,1} - 1)\, T_\varkappa^{(1,1)} + (\mu_{1,2} - 1)\, T_\varkappa^{(1,2)} + \ldots + (\mu_{p+1,n_p+1} - 1)\, T_\varkappa^{(p+1,n_p+1)} = 0 \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots 2p$$

genügen, worin die $T_\varkappa^{(k,l)}$, $\varkappa = 1, 2 \ldots 2p$, die $2p$ linear unabhängigen reellen Perioden des Integrals $Z_{k,l}(z)$ vorstellen. Da wir die Anzahl $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_{p+1}$ der reellen Zahlen $\mu_{k,l}$ grösser als $3(p+1)$ gewählt haben, so können wir zu unserm signierten Kreisbereich K_{p+1} Systeme von N reellen endlichen Zahlen $\mu_{l,k} \neq +1$ angeben, die sowohl den $p+1$ linearen Gleichungen 1. wie auch den $2p$ linearen homogenen Gleichungen 3. genügen, so dass also zu unserm signierten Kreisbereich K_{p+1} und zu jedem solchen System von N reellen Zahlen $\mu_{k,l}$ eine ganz bestimmte durch den Ausdruck 2. gegebene reelle automorphe Funktion $L(z)$ existiert. Aus $L(z)$ erhalten wir durch Integration der Schwarzschen Differentialgleichung die gewünschte normierte Abbildungsfunktion $w(z)$. Es ist

$$4. \quad w(z) = \int_0^z e^{\int_0^z L(z)\, dz}\, dz,$$

wo $w(0) = 0$ und $w'(0) = 1$ gilt.

Bildet man nun zu jedem $(p+1)$-fachzusammenhängenden schlichten Kreisbereich, der den Nullpunkt im Innern hat, dessen einer Begrenzungskreis den Nullpunkt als Mittelpunkt hat, und auf dessen k-tem Begrenzungskreis $\mathfrak{k}_k$, mit dem endlichen von Null verschiedenen Radius r_k, $n_k > 2$ voneinander verschiedene Stigmas $z_{k,l}$ liegen, mit den dazugehörigen beliebigen nur den oben aufgestellten Gleichungen 1. und 3. genügenden von $+1$ verschiedenen endlichen reellen $\mu_{k,l}$, wo $k = 1, 2, \ldots p+1$ und $l = 1, 2 \ldots n_k$ ist, die durch Formel 4. gegebenen Abbildungsfunktionen $w(z)$, so frägt es sich, ob die durch alle diese Funktionen $w(z)$ gelieferten Polygone alle überhaupt möglichen verzweigungspunktfreien schlichtartigen Polygone erschöpfen, die wohl den Nullpunkt, nicht aber den unendlichfernen Punkt, im Innern enthalten, und deren k-tes Begrenzungspolygon

ein geradliniges n_k-Eck, $k = 1, 2, \ldots p + 1$, ist, oder es frägt sich, ob man jedes verzweigunspunktfreie schlichtartige Polygon, das $(p+1)$-fachzusammenhängend ist, und das den Nullpunkt, nicht aber den Punkt Unendlich im Innern hat, durch die Umkehrung $z(w)$ einer durch Formel 4) gegebenen Funktion $w(z)$, für die also $z(0) = 0$ und $z'(0) = 1$ ist, in einen schlichten Kreisbereich eineindeutig konform abbilden kann, dessen einer Begrenzungskreis den Nullpunkt als Mittelpunkt hat.

Diese Frage ist zu bejahen, wie der folgende Kontinuitätsbeweis zeigt, wodurch dann der oben aufgestellte Satz — Seite 50 — bewiesen ist.

Zu diesem Beweise betrachten wir auf der einen Seite die Menge C_F aller durch Formel 4) gegebenen Funktionen $w(z)$, für welche die Zahl $p + 1$ des Zusammenhangs und die Anzahl $n_k > 2$ der Stigmas $z_{k,l}$ auf jedem der $p + 1$ Begrenzungskreise $\mathfrak{k}_k$, $(k = 1, 2, \ldots p + 1)$, fest gewählt sind, auf der andern Seite die Menge C_P aller $(p+1)$-fachzusammenhängenden schlichtartigen verzweigungspunktfreien Polygone, bei denen wohl der Nullpunkt, nicht aber der Punkt Unendlich, innerer Punkt ist, und die von einem n_1-Eck, einem n_2-Eck, . . ., einem n_k-Eck, . . . einem n_{p+1}-Eck begrenzt sind, wo die n_1, n_2 . . ., n_{k1}, . . . n_{p+1} die gleichen festen Zahlen wie bei der Menge C_F sind.

Die Menge C_F hängt eineindeutig von $2 n_1 + 2 n_2 + \ldots 2 n_k + \ldots + 2 n_{p+1} = 2 N$ reellen Parametern ab, diese Parameter sind die p komplexen variablen Mittelpunkte $c_2, c_3, \ldots, c_{p+1}$, die von Null verschiedenen $p + 1$ variablen Radien $r_1, r_2, \ldots r_{p+1}$, die N reellen variablen $\Phi_{k,l}$ der voneinander verschiedenen Stigmas $z_{k,l} = c_k + r_k e^{i\varphi_{k,l}}$ $(k = 1, 2, \ldots p + 1$ und $l = 1, 2, \ldots n_k)$, und die $N - 3p - 1$ willkürlich anzunehmenden reellen $\mu_{k,l}$ denn für die N reellen $\mu_{k,l}$ gelten die $p + 1$ reellen linearen Gleichungen 1. und die $2p$ homogenen linearen Gleichungen 3. mit reellen Koeffizienten. Das Wertegebiet der zu C_F gehörenden reellen Parameter bildet ein $2N$-dimensionales Gebiet G.

Auch die Menge C_P ist ein $2N$-dimensionales Gebiet, denn jedes ihr angehörende Polygon besitzt in C_P eine durch $2N$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbare volle Umgebung. Diese Parameter sind nämlich die Koordinaten der komplexen voneinander verschiedenen Ecken der $p + 1$ Begrenzungspolygone; ihre Anzahl ist also $2 n_1 + 2 n_2 + \ldots + 2 n_{p+1} = 2 N$.

Da weiter jede Funktion $w\,(z)$ aus C_F ein und nur ein Polygon aus C_P liefert, und da einem Polygon aus C_P höchstens eine Funktion $w\,(z)$ entsprechen kann, weil es nach Koebe ausser z keine analytische Funktion gibt, die zwei Kreisbereiche, die den Nullpunkt im Innern enthalten, und die je einen Begrenzungskreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt haben, so eineindeutig aufeinander abbildet, dass dabei der Nullpunkt an seiner Stelle bleibt und der Abbildungsmodul dort Eins ist, so ist die Menge der durch alle Funktionen $w\,(z)$ aus C_F gelieferten Polygone, oder wie wir kurz sagen wollen die Menge der Formelpolygone als eineindeutiges Bild der Menge C_F und darum auch des Parametergebietes G eine Teilmenge C_B von C_P. Diese Teilmenge C_B von C_P steht nun weiterhin noch in stetiger Beziehung zu dem Parametergebiet G, denn die Funktionen $w\,(z)$ aus C_F und damit auch ihre Bildpolygone ändern sich stetig mit den willkürlichen Parametern von C_F, denn in $w\,(z) = \int_0^z e^{\int_0^z L(z)dz} dz$ ist die reelle automorphe Funktion $L\,(z)$ und ihr Integral $\int_0^z L\,(z)\,dz$ eine stetige Funktion von z und den willkürlichen $2\,N$ Parametern.[54]) also ist das Integral $w\,(z)$ über eine stetige Funktion $e^{\int_0^z L(z)dz}$ von z und den $2\,N$ willkürlichen Parametern selbst eine stetige Funktion der $2\,N$ willkürlichen Parameter, w. z. b. w.

Nach dem Vorhergehenden ist also die Menge C_B der Formelpolygone eineindeutiges und stetiges Bild des $2\,N$-dimensionalen Parametergebietes G in dem $2\,N$-dimensionalen Gebiet C_P, somit nach dem Brouwerschen Satze von der Invarianz des Gebietes selbst ein $2\,N$-dimensionales Gebiet, d. h. alle Nachbarpolygone in C_P eines Formelpolygons, sofern man sich auf eine genügend kleine volle Umgebung desselben beschränkt, sind auch Formelpolygone.

Daraus schliessen wir im folgenden weiter, dass das Gebiet C_B der Formelpolygone das Polygongebiet C_P vollständig ausfüllt, denn wäre das Gebiet C_B nicht mit C_P identisch, so müsste das Gebiet

[54]) Diesen Nachweis hat E. Ritter in der ausführlichen Arbeit: Die Stetigkeit der automorphen Funktionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereichs, Teil I, Symmetrische Fundamentalbereiche, Mathematische Annalen, B. 45, erbracht.

C_B in C_P Grenzen haben. Diese Grenzen beständen aus Polygonen P^* von C_P, in deren beliebiger Nähe es Polygone von C_P gäbe, die keine Formelpolygone sind. Ein solches Polygon P^* kann nun aber nicht in C_P existieren, denn jedes solche Polygon P^*, das auf der Grenze des Gebietes C_B in C_P liegt, das also Grenze von unendlichvielen Formelpolygonen ist, muss, wie unser gleich zu beweisende Limessatz aussagt, selbst Formelpolygon sein, also müssen alle Nachbarpolygone von P^* in C_P, sofern man sich auf eine genügend kleine volle Umgebung beschränkt, Formelpolygone sein, was der Definition von P^* widerspricht.

Wir müssen jetzt nur noch den Beweis des Limessatzes nachtragen, nach dem jedes Polygon P^* in C_P, gegen das unendlichviele Formelpolygone $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ konvergieren, auch ein Formelpolygon ist. Wir können immer durch Auswählen noch erreichen, dass die Formelpolygone $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ von innen heraus gegen das Polygon P^* als Kern konvergieren. Da jedes der Formelpolygone P_n durch die Umkehrung $z_n(w)$ einer Funktion $w_n(z)$ aus C_F, wo $z_n(0) = 0$ und $z'_n(0) = 1$ gilt, auf einen schlichten Kreisbereich K_n eineindeutig konform abbildbar ist, so ist die Folge $z_n(w)$ nach Seite 33 in P^* kompakt, d. h. man kann aus derselben eine unendliche Teilfolge $z_{n_q}(w)$ aussondern, die in jedem der P_n gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $Z(w)$ konvergiert, wo $Z(0) = 0$ und $Z'(0) = 1$ ist, die nach Seiten 34—35 das Grenzpolygon P^* auf den Kern K der schlichten Kreisbereiche K_{n_q} eineindeutig konform abbildet. Dieser Kern K ist ein $(p+1)$-fachzusammenhängender schlichter Kreisbereich, der den Nullpunkt im Innern enthält, dessen einer Begrenzungskreis den Nullpunkt als Mittelpunkt hat, und dessen sämtliche Begrenzungskreise nach dem Schlusse auf Seite 35 oder nach dem auf Seiten 46—47 endliche Radien besitzen. Weiter folgt nach b) des Beweises von Satz I im I. Kapitel, dass die Formeln $w_{n_q}(z)$ gegen die Umkehrfunktion $w(Z)$ von $Z(w)$ konvergieren, und daraus schliesst man analog, wie wir für $p = 0$ auf Seite 28 ausführlich dargelegt haben, dass $w(Z)$ eine Formel aus C_F ist. Wir können diesen Beweis mit einem Hinweis auf Seite 28 kurz fassen. Da die Formeln $w_{n_q}(z)$ stetig von ihren endlichvielen gleichmässig beschränkten Parametern abhängen, so ist die Grenzfunktion $w(Z)$ der $w_{n_q}(z)$ wieder eine Formel, die nicht ausgeartet sein kann, d. h. deren Parameter allen Bedingungen genügen, die wir für eine Formel 4) aus C_F aufgestellt haben. Denn in

dieser Grenzformel $w(Z)$, die also den schlichten Kreisbereich K auf das Polygon P^* von C_P eineindeutig konform abbildet, erfüllt K alle für K_{p+1} aufgestellten Bedingungen. Ferner müssen ihre N Stigmas $z_{k,l}$ voneinander verschieden sein, denn sonst würde die Formel ein Polygon mit weniger als N Ecken liefern. Dann genügen ihre $\mu_{k,l}$ wie diejenigen der Näherungsformeln $w_{n_q}(z)$ sowohl den Gleichungen 1. wie auch den Gleichungen 3. Damit ist in allen Teilen erwiesen, dass $w(Z)$ eine Formel 4) aus C_F und somit das Polygon P^* ein Formelpolygon sein muss, w. z. b. w. Hiermit haben wir einen vollständigen Beweis für die eineindeutige konforme Abbildbarkeit eines $(p+1)$-fachzusammenhängenden schlichtartigen verzweigungspunktfreien Polygons auf einen schlichten Kreisbereich geliefert.

Auf Grund dieses Satzes können wir den zweiten Beweis des Kreisnormierungstheorems für schlichtartige, verzweigungspunktfreie $(p+1)$-fachzusammenhängende Bereiche B, die den Nullpunkt, nicht aber den Punkt Unendlich, im Innern haben, und damit nach einer eventuell nötigen linearen Transformation für alle schlichten Bereiche in wenigen Strichen erbringen. Wir fassen zu diesem Zwecke den abzubildenden allgemein begrenzten Bereich B von innen heraus als Kern von $(p+1)$-fachzusammenhängenden schlichtartigen und verzweigungspunktfreien Polygonen Π_n auf, die den Nullpunkt im Innern haben. Da jedes der Annäherungspolygone Π_n durch die Umkehrfunktion $z_n(w)$ einer Formel 4., wo $z_n(0)$ und $z'_n(0) = 1$ ist, auf einen schlichten Kreisbereich K_n, dessen einer Begrenzungskreis den Nullpunkt als Mittelpunkt hat, eineindeutig konform abbildbar ist, so konvergiert nach Seite 33 ff. eine unendliche Teilfolge $z_{n_q}(w)$ der $z_n(w)$ gleichmässig in jedem der Π_n gegen eine Grenzfunktion $Z(w)$, für die $Z(0) = 0$ und $Z'(0) = 1$ gilt und die den Bereich B in den Kern K der schlichten Kreisbereiche K_{n_q} eineindeutig konform abbildet. In dem Kern K erkennt man einen schlichten $(p+1)$-fachzusammenhängenden Kreisbereich, der den Nullpunkt im Innern enthält und dessen einer Begrenzungskreis den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat. Jeder einzelne seiner Begrenzungskreise kann zu einem Punkte zusammengeschrumpft sein.

Zusammenfassung.

Zum Schlusse will ich die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit kurz zusammenfassen.

Im I. Kapitel gebe ich in den Sätzen I—VII bis jetzt nicht bekannte Verallgemeinerungen des am Anfange dieser Arbeit zitierten Satzes von Bieberbach.

Im II. Kapitel zeige ich die Verwendbarkeit dieser Sätze, und zwar hauptsächlich bei Kontinuitätsbeweisen im Gebiete der konformen Abbildung.

Insbesondere gebe ich in A. mit der Kontinuitätsmethode zum erstenmale eine reinfunktionentheoretische, vollständige Lösung eines von H. A. Schwarz herrührenden Problems der konformen Abbildung, die in dem Nachweise der konformen Abbildbarkeit eines beliebigen endlichblättrigen einfachzusammenhängenden n-Ecks durch die Umkehrfunktion des bekannten Integralausdruckes von Schwarz-Cristoffel auf die schlichte Kreisscheibe besteht.

Mit Hilfe unserer Lösung dieses Schwarzschen Problemes beweisen wir in B. auf rein funktionentheoretischem Wege den allgemeinen Abbildungssatz für beliebige einfachzusammenhängende Bereiche und das allgemeine Uniformisierungsprinzip von Koebe.

Der Abschnitt C. enthält zwei neue Kontinuitätsbeweise des Kreisnormierungstheorems für endlichvielfachzusammenhängende schlichtartige Bereiche. Einer dieser Beweise lässt sich Wort für Wort zu einem Beweise des allgemeinen Geradenschlitztheorems von Koebe umsetzen.

Vita.

Ich, Joseph Heinrich Kaufmann aus Basel, wurde am 20. Januar 1890 geboren als Sohn des Heinrich Kaufmann, technischer Betriebsleiter, und seiner Frau, Josephine, geborene Mangold († 1913).

Nach Absolvierung der hiesigen Primarschule, der untern und obern Realschule bestand ich im Herbst 1908 die Maturitätsprüfung.

Im Oktober desselben Jahres liess ich mich an der Universität Basel immatrikulieren, wo ich mich hauptsächlich dem Studium der Mathematik, Astronomie, Physik und Chemie widmete.

Im Sommer 1910 und im Winter 1910/11 studierte ich an der Universität Göttingen Mathematik.

Zurückgekehrt an die Universität Basel reichte ich 1912 der hiesigen philosophischen Fakultät eine Arbeit ein als Lösung der von ihr gestellten Preisaufgabe: „Es sind die neuesten Arbeiten aus dem Gebiete der automorphen Funktionen und des Uniformisierungsproblems zu charakterisieren, und wenigstens eine der Methoden an einem Beispiel zu erläutern und rechnerisch durchzuführen." Diese Arbeit wurde von der Universität preisgekrönt.

Zur praktischen pädagogischen Ausbildung nahm ich im Januar 1914 eine Lehrstelle für den höhern mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an dem Institut Langnau an, die ich nach 1½-jährigem Wirken aufgab, um im Oktober 1915 meine Studien an der Universität Basel wieder aufzunehmen.

Gern gedenke ich der Vorlesungen, Übungen und Praktika, die ich bei den folgenden Herren Professoren und Dozenten besuchte:

In Basel: Bieberbach, Fichter, Flatt, Fueter, Hagenbach, Hecke, Matthies, Riggenbach, Rupe, Spiess, Von der Mühll, Zickendraht.

In Göttingen: Bernstein, Haar, Hilbert, Koebe, Toeplitz, Voigt.

Zu ganz besonderem Danke fühle ich mich Herrn Professor Dr. Bieberbach verpflichtet, dem ich unter anderm auch die erste Anregung zur vorliegenden Arbeit verdanke. —

Herrn Professor Dr. Hecke bin ich für Ratschläge sehr verbunden.